







# الصف الثانى الثانوي

الفــصـل الدراســى الأول

كتتاب الطالب

# القسم العلمي

### **تأثيث** أ/ كمال يونس كبشة

أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح

أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى

مراجعة

أ/فتحى احمد شحاتة

أ/سمير محمد سعداوي

۲۰۲۰ - ۲۰۱۹

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية و التعليم و التعليم الفنى



															•			6	_	w°	11
						•		•	•	•	* 1		•					سة	ر،	بد	الو
	•	• •				•					•			•			•	ـل		P	الف
									 					•	 		:	ان	وا	_;	الع
			•			•	 	 				*				سی	اب	در	١١	م	لعا

## المقدمت

# بسم الله الرحمن الرحيم

#### يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التي تم في ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلي:

- ↑ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها في الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.
  - تزويد المتعلم بما هو وظيفي من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.
  - ٣ تبتّى مدخل المعايير القومية للتعليم في مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:
    - أ) تحديد ما ينبغي على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.
    - ب ) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:
- أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات،
  - \$ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).
  - ♦ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.
- احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

#### وفي ضوء ما سبق روعي في هذا الكتاب ما يلي:

- ★ يتضمن الكتاب ثلاثة مجالات هى: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، حساب المثلثات، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة، ومخطط تنظيمى لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التي تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتي تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاوني، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالمنطة المحيطة وكيفية معالحتها.
- ★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.
- ★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.
  - \* تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمي يقيس بعض المهارات الازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.
  - ★ ينتهى الكتاب باختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسي.

وأخيرًا .. نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة. وأخيرًا .. والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

# المحتويات

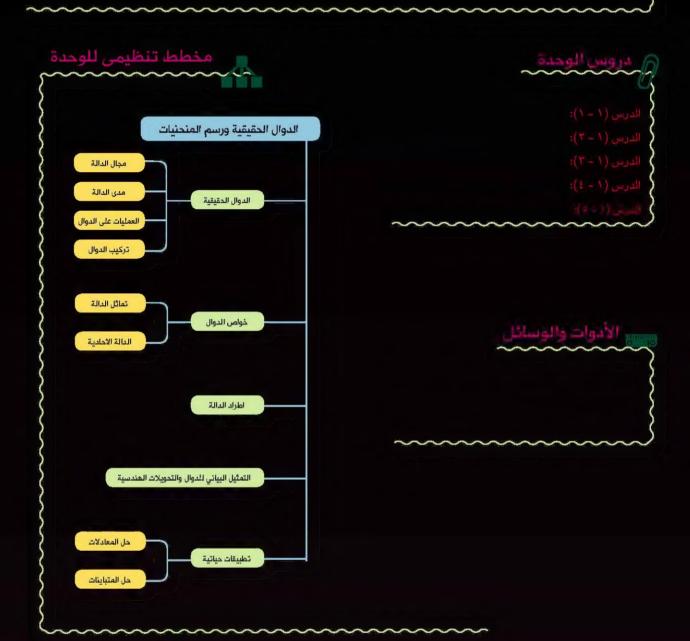
£	· أ الدوال الحقيقية. مسمسهسمهسهسهسهسهسهسهسهسهسهسهسه	- 1	Ö.	20	اله
DESCRIPTION OF THE PROPERTY OF	۲۰ بعض څواص الدوال.	- 1			
<b>Y</b> 0	۳۰ اطراد الدوال.	-1	U	ولر	ועו
**	💲 التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية	-1			تي.
EA secure secretary may be selected and selected and be selected and be selected and be selected and be selected as the selected and se	🌢 🏻 حل معادلات ومتبايثات القيمة المطلقة	- 1	Ë.	ள்வ	لدوال الحقيقي
<b>6V</b>	فص للوحدة، سيسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسس	ملذ	2	٤	<u>F</u>
09	نبار تراکمي. سسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسس	اخت	<u>6</u>	9	وال
					<u>L</u>
			Ô		011
***************************************	١٠ الأسس الكسرية	٠ ٢			
79	٣٠ الدالة الأسية وتطبيقاتها	٠٢_	Q	ĮĮ.	
<b>V</b> 0	۳۰ المعادلات الأسية .	- ۲	۲		
Vq	الدالة العكسية.	- ۲		تالح	
<b>**</b>	. 🛕 الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني.	٠ ٢	נים	وت	E
4.	٦٠ بعض خواص اللوغاريتمات.	٠ ٢	تا	وغا	لأس
W savely and lock and subject and property subjects and and subjects and the subject and the s	قص الوحدة. بموسومة موسومة والمساورة والموسومة	ملذ	7	LIIG	
99	نيان قراكمي، سسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسسس	اخت	9		

# المحتويات

1.9	۲-۳ مقدمة فى النهايات. ۲-۳ إيجاد نهاية الدالة جبريا.	الوحدة <b>الثالثة</b>
	۳ - ۳ نهاية الدالة عند اللانهاية ۳ نهاية الدوال المثلثية ۳ نهاية الدوال المثلثية ۳ - ۴ نهاية الدوال المثلثية ۳ - ۴ - ۲ - ۲ - ۲ - ۲ - ۲ - ۲ - ۲ - ۲ - ۲	الكاف
144	۳ - ۵ بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة.	ت ا بالد
	٣-٦ الاتصال: ملخص الوحدة.	النهايات
188	اختبار تراكمي.	
		الوحدة
	<ul> <li>\$ - أ قانون قاعدة الجيب.</li> <li>\$ - * قان د قاء : من القال</li> </ul>	الرابعة
	<ul> <li>٤ - ٢ قانون قاعدة جيب التمام.</li> <li>ملخص الوحدة.</li> </ul>	
	اختبار تراكمي	مثلثات



	المصطلحات الأساسية



### الدوال الحقيقية

#### Real Functions

#### سوف تتعلم

- ◄ مفهوم الدالة الحقيقية.
- اختبار الخط الرأسي.
- ♦ الدالة متعددة التعريف ( المعرفة بأكثر من قاعدة).
- ◄ تحليد مجال ومدى الدالة الحقيقية.
  - ▶ العمليات على الدوال.

#### 🚺 المصطلحات الأساسية

- Function الة والة
- ♦ مجال Domain
- Co-domain ◄ مقابل مقابل
- ♦ مدى Range
- مخطط سهمی Arrow Diagram
- ♦ مخطط بياني Cartesian Diagram خط رأسي

  - ◄ دالة متعددة التعريف

Piecewise Function

Vertical Line

### استكشف 🖽

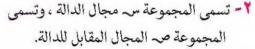
سبق أن درست مفهوم الدالة، وعلمت بأنها علاقة بين مجموعتين غير خاليتين سہ ، صہ بحیث تحدد لکل عنصر من عناصر سہ عنصرًا وحیدًا من عناصر صہ ويرمز للدالة بأحد الرموز: د أو ف أو س أو ....

إذا رمزنا لدالة ما من المجموعة سم إلى المجموعة صم بالرمز د فإنها تكتب رياضيًّا:

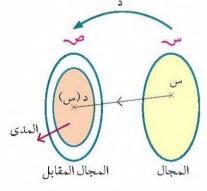
د: سه -- صه وتقرأ د دالة من سه إلى صه ويلاحظ:

١- لكل عنصر س ∈ سر يتعين عنصر وحيد ص ∈ ص بقاعدة الدالة دو تكتب:

ص = د(س)



- تسمى المجموعة  $\{\omega = \varepsilon(\omega) : \omega \in \omega_{+}\}$ مدى الدالة وتعرف بمجموعة صور عناصر محال الدالة.



#### الدالة الحقيقية Real Function

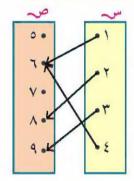
تسمى الدالة د دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ع أو مجموعة جزئية منها.

- الأدوات المستخدمة ♦ آله حاسة علمة.
- ◄ برامج رسومية للحاسب.

إذا كانت د: س → ص فإن بيان د =

{ (س، ص): س ∈ سہ، ص ∈ ص م عص=د(س)}



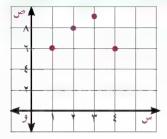


١ العلاقة من المجموعة سم إلى المجموعة صم الممثلة في المخطط السهمي المجاور تمثل دالة، حيث: المجموعة سم هي مجال الدالة = {١، ٢، ٣، ٤} والمجموعة صم المجال المقابل للدالة =  $\{0, 7, 7, 7, 9\}$ أما مجموعة العناصر (٦، ٨، ٩) فتعرف بمدى الدالة

كما يمكن تمثيل العلاقة السابقة بالمخطط البياني كما في الشكل التالي حيث: بان الدالة =  $\{(1, \Gamma), (7, \Lambda), (7, P), (3, \Gamma)\}$ 

#### لاحظ أن:

- ١- الشكل البياني للدالة هو مجموعة من النقط المنفصلة
- ٢- الخط الرأسي المار عند كل عنصر من عناصر مجال الدالة يقطع تمثيلها البياني
   في نقطة وحيدة.



### 🔁 حاول أن تحل

- () في النمط المقابل جميع المربعات متطابقة. إذا كان س عدد صفوف الشكل في هذا النمط، ص مساحة الشكل بالوحدات المربعة.
  - ال ما قيمة ص عندما س = ٥؟ ما قيمة ص عندما س = ٩؟
- ك اكتب العلاقة الرياضية بين عدد صفوف الشكل ومساحته في هذا النمط.
  - ج هل هذه العلاقة دالة من سه إلى صه ؟ فسر إجابتك.

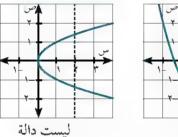


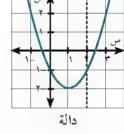
## تعلم 🚱

مثال 贪

# اختبار الخط الرأسي

إذا وجد أن الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التي تمثل العلاقة؛ كانت العلاقة دالة من سم ص

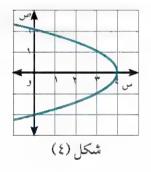


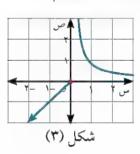


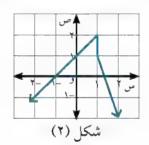
### Identify the Relations Representing Function

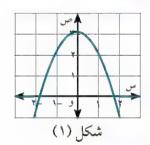
### تحديد العلاقات التي تمثل دالة









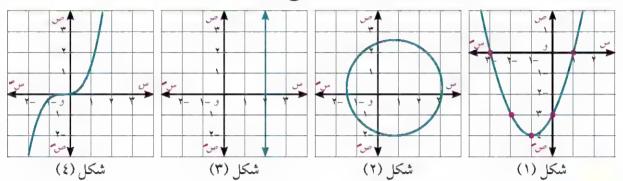


#### الحل 🔷

- شكل (١) يمثل دالة في س.
- شكل (٢) لا يمثل دالة في س لأن الخط الرأسي المار بالنقطة (١، ٠) يقطع الشكل البياني في عدد غير منتهِ من النقط. شكل (٣) يمثل دالة في س.
  - شكل (٤) لا يمثل دالة في س لأنه يوجد خط رأسي يقطع المنحني في أكثر من نقطة.

#### 🚹 حاول أن تحل

ین أی الأشكال الآتیة تمثل دالة من سہ  $\longrightarrow$  صہ مع ذكر السبب.



## مثال

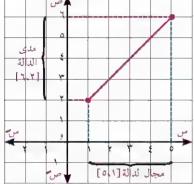
### تعيين مدى الدالة بيانيًا

- (m) = m + 1 إذا كانت د: [١، ٥]  $\longrightarrow g$  حيث د(m) = m + 1 ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.
- س) إذا كانت من: [١، ٥ [ → ع حيث من (س) = س + ١ ارسم الشكل البياني للدالة من ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

#### 🐽 الحل

الدالة ددالة خطية مجالها [١، ٥] تمثل بيانيًّا بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان (١، د(١)) ، (٥، د(٥)) أى النقطتين (١، ٢)، (٥، ٢). مدى الدالة د = [٢، ٦]

وهو مجموعة الاحداثيات الصادية لجميع النقط التي تنتمي إلى منحنى الدالة.

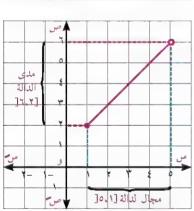


الدالة من دالة خطية مجالها [١، ٥] وواضح أن من (س) = د(س) كل س  $\in$  [١، ٥] فتمثل بيانيًّا بقطعة مستقيمة إحدى طرفيها النقطة (١، ٢) مع إستبعاد النقطة الأخرى (٥، ٦) من الشكل البياني بوضع دائرة مفرغة عند هذه النقطة.

مدى الدالة م= [٢،٦]

### 🛂 حاول أن تحل

- (1) إذا كانت د: [1 ،  $\infty$   $\longrightarrow$  ع ، حيث د(س) = 1  $\infty$  ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.
- ب) إذا كانت م: ]-  $\infty$ ، -1  $\longrightarrow$  ع، حيث  $\sim$  (س) = 1 س ارسم الشكل البياني للدالة م، واستنتج من الرسم مدى الدالة.



#### Piecewise-Defined Functions

#### الدالة متعددة التعريف؛



السعر بالقروش	الاستهلاك الشهري (متر مكعب)
٤٠	حتی ۲۵
1	أكثر ٢٥ حتى ٥٠
10-	اکثر من ۵۰

لترشيد استهلاك الكهرباء والمياه والغاز يتم حساب قيمة الاستهلاك الشهرى منها تبعًا لشرائح خاصة تربط كمية الاستهلاك بقيمته.

يبين الجدول المقابل أسعار شرائح الاستهلاك الشهرى من الغاز الطبيعى في المنازل بالقروش، احسب مع زميل قيمة استهلاك منزل من الغاز الطبيعي بالقروش للكميات التالية:

١- ٣٠ متر مكعب شهريًّا.

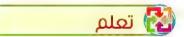
۲- ۲۰ متر مکعب شهريًّا.

[تضاف قيمة الضرائب المستحقة ورسوم تشغيل الخدمة بعد حساب قيمة الاستهلاك الشهري]

يمكن التعبير عن الجذول السابق بالدّالة و لحسّاب قيمة استهلاك س مترًا مكعبًا من الغاز شهريًّا حيث س∈ ع على النحو التالى:

$$c(m) = \begin{cases} 100 & \text{aixal } 0.5 \\ 1000 & \text{aixal } 0.5 \\ 1000 & \text{aixal } 0.5 \end{cases}$$

وهي دالة حقيقية متعددة التعريف (معرفة بأكثر من قاعدة)



الدالة متعددة التعريف، هي دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

#### 🚹 حاول أن تحل

- ٤ تحقق باستخدام الدالة السابقة من صحة اجابتك في عمل تعاوني ، ثم احسب قيمة الاستهلاك الشهرى من الغاز للكميات التالية:
  - (ج ٤٥ متر مكعب
- ربى ٤٠ متر مكعب
- ل ۱۵ متر مکعب

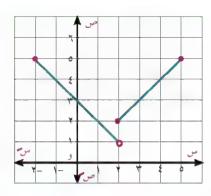
#### رسم الدالة متعددة التعريف:



👩 الحل

الدالة د معرفة على فترتين وتتعين د(س) بواسطة قاعدتين:

القاعدة الأولى: درس) = ٣ -س عندما - ٢ 
$$\leq$$
 س  $<$  ٢ أى على الفترة  $[-7, 7]$  وهى لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان  $(-7, 0), (7, 1)$  مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة  $(7, 1)$  لأن ٢  $\equiv$   $[-7, 7]$  كما في الشكل المقابل.



القاعدة الثانية:  $c_{\gamma}(m) = m$  عندما  $T \leq m \leq 0$  أى على الفترة [۲، ٥] وهي لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان (۲، ۲)، (٥،٥) ويكون مجال الدالة  $c_{\gamma} = [-7, 7] \cup [7, 0] = [-7, 0]$ 

ويمكن من الرسم البياني نستنتج أن:

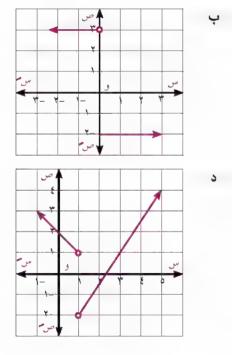
مجال الدالة د = [-۲، ٥] مدى الدالة د = ]١، ٥]

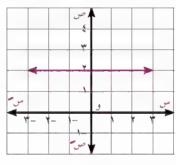
### 🚹 حاول أن تحل

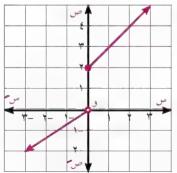
عين مجال الدالة ومثلها بيانيًا واستنتج من الرسم المدى.



٦ في كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى الدالة.







مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما

لم تكن معرفة على مجموعة

جزئية منها.

#### تحديد مجال الدوال الحقيقية والعمليات عليها

Determining the Domain of the Real Functions and Operations on it

يتحدد مجال الدالة من قاعدة تعريفها أو الشكل البياني لها.

## مثال 🚮



٥ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

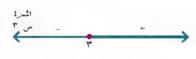
$$\frac{m+m}{4-r_{m}} = (m)_{1}$$

ج د<sub>ب</sub>(س) = ¥ س - ه

$$\frac{1}{2} \left( \omega \right) = \frac{1}{4 \sqrt{1 - \frac{7}{2} - \frac{3}{2}}}$$

🕜 الحل

س =  $\pm m$  أى س =  $\pm m$  أي س =  $\pm m$  الدالة د, تكون غير معرفة عندما يكون المقام =  $\pm m$  أي س وعليه يكون مجال الدالة در هو ع - {-٣، ٣}.



ب مجال الدالة در هو جميع قيم س التي تجعل قيمة ما بداخل الجذر التربيعي موجبًا أو صفرًا ، أي قيم س التي تجعل س -٣١٠٠

\* € W - m ···

ج. در(س) = لا س- ٦، دليل الجذر عدد فردى مجال در=ع

**\*** ≤ **...** 



و تکون دے معرفة عندما یکون س و - ٤ - ٠ وعليه فإن مجال د. هو  $]-\infty$ ، - $[\, \cup \, ]$ ۲،  $\infty$  = 9 -  $[\, -7, \, Y]$ 

#### للحظ:

إذا كانت د(س) =  $\sqrt[4]{\sqrt{(m)}}$  حيث ن $\in \infty^+$ ، ن< 1، ر(m) كثيرة حدود

أولا: عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د = ع

ثانيًا: عندما ن عدد زوجي فإن: مجال الدالة د هو مجموعة قيم س بشرط ر(س) ١٠٠٠

#### 🚰 حاول أن تحل

حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:-

$$\frac{\gamma_{m+m}}{\gamma_{m+m}} = \frac{\gamma_{m+m}}{\gamma_{m+m}} = \frac{\gamma_{m+m}}{\gamma_{m+m}}$$

$$\frac{\sigma}{r} c_{\psi}(m) = \sqrt{m - \sigma}$$

تفكير ناقد:

إذا كان مجال الدالة د حيث د(س) =  $\frac{7}{4 - 7 + 12}$  هو  $\frac{3}{4} - \frac{7}{4}$  أوجد قيمة ك.

العمليات على الدوال

**Operations on Functions** 

🔁 تعلم

إذا كانت در، در دالتين مجالاهما م، مرعلى الترتيب، فإن:

$$(c_1 \pm c_4)$$
 (س) =  $c_1$  (س)  $\pm c_4$  (س) د مجال (د $_1$  فو م $_2$  موال (د

$$(c_1, c_2)$$
 (س) =  $(c_1, c_3)$  ، مجال (د, د د م هو م م م م م م

$$(c_{\gamma})$$
 (س)  $=\frac{c_{\gamma}(m)}{c_{\gamma}}$  حیث  $c_{\gamma}$  (س)  $\neq \cdot$  مجال  $(\frac{c_{\gamma}}{c_{\gamma}})$  هو  $(a_{\gamma} \cap a_{\gamma}) - \dot{o}$   $(c_{\gamma})$  حیث  $\dot{o}$   $(c_{\gamma})$  مجموعة أصفار  $c_{\gamma}$ 

نلاحظ أنه في جميع الحالات السابقة ، مجال الدالة الجديدة يساوى تقاطع مجالى د، ، د، باستثناء القيم التى تجعل  $c_{\gamma}(m) = 1$  في عملية القسمة.



$$(\varepsilon, 3) \stackrel{\mathfrak{F}}{\circ}$$

ثانيًا: احسب القيمة العددية - إن أمكن - لكل من:



🚺 الحل

أولاً: مجال د = م, = ع ، مجال ر = م, = [-۲،  $\infty$  [ ، مجال ع = م, = ]- $\infty$  ، ٤]

$$(c+c)$$
 (س) =  $c(w)$  +  $c(w)$   
=  $w^{7}$  -  $3w$  +  $\sqrt{w+7}$   
=  $w^{7}$  -  $3w$  +  $\sqrt{w+7}$   
=  $e^{-3}$  =  $e^{-3}$ 

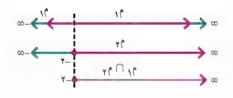
$$(v - 3) (w) = (w) - 3 (w)$$

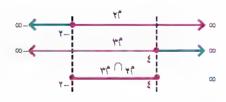
$$= \sqrt{w + 7} - \sqrt{2 - w}$$

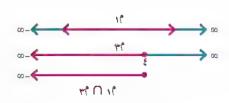
$$(c.3) (w) = c(w).3 (w)$$

$$= (w^{7} - 2w) \sqrt{3 - w}$$

$$= (e.3) = 3 \cap (c.3) = 3 - \infty, 3 = 1 - \infty, 3$$







$$\frac{\overline{2}}{c} \left( \frac{3}{c} \right) \left( \frac{3}{c} \right) = \frac{3}{c} \left($$

مجموعة أصفار الدالة دهي (٠٠٤)

$$\{\cdot\}$$
 -] غ ،  $\infty$ -  $[=\{\xi,\cdot\}-\mathcal{P}\cap[\xi,\infty-[=(\frac{\mathcal{E}}{s})]\}$  مجال ( $\frac{\mathcal{E}}{s}$ ) مجال

ثانيًا: القيم العددية:

(ر - ع) (س) = 
$$\sqrt{m+7}$$
 -  $\sqrt{3}$  -  $\sqrt{5}$  -  $\sqrt{5}$  الله  $\in [-7,3]$  . (ر-ع)(۱) =  $\sqrt{7}$  -  $\sqrt{7}$  = صفر

$$(c.3) (m) = (m' - 3m) + 3 - m$$
 لکل  $m \in ] -\infty$  ، ٤]  $(c.3) (c.3) (c.3) (c.3)$  غير معرفة

$$\{*\}-\frac{1}{2}: \infty-\left[\frac{3}{2}\right] \longrightarrow \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{$$

#### 🛂 حاول أن تحل

🔥 إذا كانت د، ر دالتين حقيقيتين حيث:

$$\frac{(c)}{(c)}$$
 مجال كل من الدوال الآتية:  $(c+c)$ ،  $(c+c)$ ،  $(c+c)$ 

$$(z+\zeta)(0)$$
,  $(z)(1)$ ,  $(z)(2)$ ,  $(z)(2)$ 

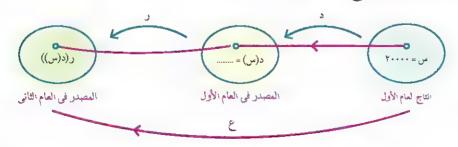
### Composition of Functions تركيب الدوال

عمل تعاونہے

يقوم مصنع بتصدير جزء من إنتاجه يعطى بالعلاقة د(س) =  $\frac{1}{2}$  س حيث س عدد الوحدات المنتجة فى العام الأول، وكان عدد الوحدات المصدرة فى العام التالى يعطى بالعلاقة ر(د) = د + ١٥٠٠ حيث د عدد الوحدات المصدرة فى العام الأول.

ابحث (مع زميل) كم يكون عدد الوحدات المصدرة في العام الثاني إذا كان انتاج المصنع في العام الأول العدة المحدة

للتحقق من صحة استنتاجك تتبع المخطط التالي:

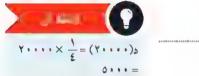




إذا كان مدى الدالة د تقاطع مجال الدالة ر لا يساوى 🛇 فإنه يمكن استنتاج دالة جديدة ع تتركب من

وتقرأ ر تركيب د، أو ربعد دحيث تطبق الدالة د أولاً ثم الدالة ر

من المخطط السابق يكون:



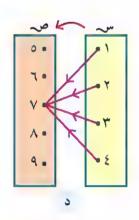
فكن هل عملية تركيب الدوال عملية إبدالية؟

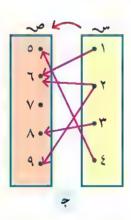
#### 🚹 حاول أن تحل

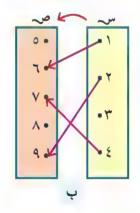


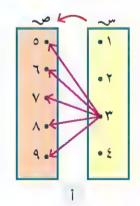
### اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أى المخططات الآتية تمثل دالة من سم إلى صه :

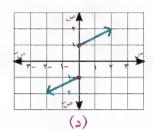


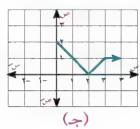


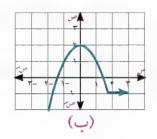


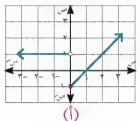


### 💎 أي من الأشكال البيانية الآتية لا تمثل دالة في س:









### 🔻 العلاقة المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتي لا تمثل دالة هي:

### ٤ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة في س ما عدا العلاقة:

أجب عن ما يأته:

ثم ارسم الشكل البياني للدالة ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

### ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

ومن الرسم استنتج مدي الدالة.

$$C(m) = \begin{cases} m+m & \text{sixal } m \geq 7 \\ C(m) & \text{sixal } m \geq 7 \end{cases}$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \{ \mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{v} \}$$
 افا کانت د(س) =  $\{ \mathbf{v} = \mathbf{v} \}$  عندما  $\mathbf{v} \in \mathbf{v}$ 

ارسم الشكل البياني للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

ارسم الشكل البياني للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

أوجد:

(٠) الربط بالصيكانيكا: إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع(ن) بالسنتيمتر/ ثانية تعطى بالدالة ع حيث:

$$3(i) = \begin{cases} \Lambda & \text{sixal} & \gamma \leqslant i \leqslant 1 \\ \Lambda & \text{sixal} & 1 \leqslant i \leqslant 1 \end{cases}$$

$$3(i) = \begin{cases} \Lambda & \text{sixal} & \Lambda \end{cases}$$

$$3(i) = \begin{cases} -3i + \Lambda \wedge \text{sixal} & \Lambda \wedge \gamma \leqslant i \leqslant 1 \end{cases}$$

حيث ن الزمن بالثانية، أوجد:

👣 للبيط بالتجليق: تمثل الدالة د ، حيث:

المبلغ بالجنيه الذي تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربية، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة. أوجد:

(ل) السط بالهندسة: إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل. اكتب محيط المربع كدالة في طول ضلعه ح (ل) ثم أوجد:

$$(\psi) \supset (7)$$

- البيط بالهندسة: إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها نق. اكتب المساحة كدالة في طول نصف القطر (أبيط بالهندسة: إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف القطر م (نق) ثم أوجد م $(\frac{1}{7})$ ، م(0).
  - عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

$$\frac{1+m}{1+m} = (m) = \frac{m+m}{m^2-nm+m} = (m) = \frac{m+m}{m}$$

$$\frac{1}{Y+m}+\frac{1}{m}=(m)$$

$$\frac{\gamma_{m}}{4} = (m) = \frac{\gamma_{m}}{4\gamma_{m}-1}$$

(0) إذا كان: د: ع  $\rightarrow$  ع حيث د.(س) = ٣س - ١ ،

فأوجد: (د, + دي) (س) ، (د, - دي) (س) مبينًا مجال كل دالة.

أوجد:  $(c_{\gamma} + c_{\gamma})$  (س) ،  $(c_{\gamma} - c_{\gamma})$  (س) ،  $(\frac{c_{\gamma}}{c_{\gamma}})$  (س) ،  $(\frac{c_{\gamma}}{c_{\gamma}})$  (س) مبينًا مجال كل دالة.

أوجد: (دهر) (س) ، (ره د) (س) وحدد مجال كل منهما.

أوجد: (د ٥ ر) (س) في أبسط صورة محددا المجال ثم أوجد (د ٥ ر) (٣)

### نوکير ابداعون

إذا كان ع (س) =  $\sqrt{m^7 - 3}$  فأوجد الدالتين د ، ر بحيث يكون: ع(س) = (د  $^{\circ}$  ر) (س)

### بعض خواص الدوال

#### Some Properties of Functions

Symmetry حول محور الصادات أو التماثل حول نقطة الأصل.

#### سوف تتعلم

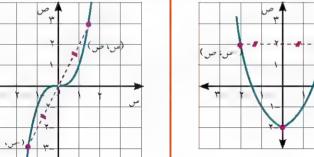
- ◄ التياثل في منحنيات الدوال.
  - الدوال الزوجية.
  - ♦ اللوال الفودية.
  - الدوال الأحادية.

#### تمميد

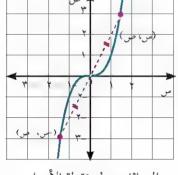
سبق أن درست التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم؛ لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، ودرست كذلك التماثل حول نقطة الأصل.

قد يتميز الشكل البياني للدالة دحيث ص = د(س) بصفات هندسية تلاحظ من الرسم

بسهولة، ويمكن استخدامها في دراسة الدوال وتطبيقاتها وأشهر هذه الصفات التماثل



التماثل حول محور الصادات شكل (١)



التماثل حول نقطة الأصل. شکل (۲)

### المصطلحات الأساسية

◄ تماش Symmetry

 دالة زوجية Even Function

♦ دالة فردية Odd Function

دالة أحادية

One to One Function

 خط أفقى Horizontal Line

### في شكل (١):

تكون النقطة (-س، ص) الواقعة على الشكل البياني لمنحنى الدالة هي صورة النقطة (س، ص) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس حول محور الصادات.

#### في شكل (٢):

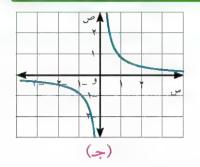
◄ آله حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

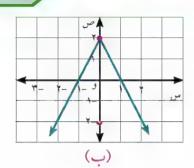
الأدوات المستخدمة

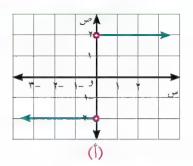
يوضح الشكل البياني للعلاقة بين س، ص تماثل المنحني حول نقطة الأصل، حيث إن النقطة (-س، -ص) هي صورة النقطة (س، ص) الواقعة على نفس المنحني.

#### 🗗 حاول أن تحل

١ في كل شكل من الأشكال الآتية بيِّن المنحنيات المتماثلة حول محور الصادات والمنحنيات المتماثلة حول نقطة الأصل.







#### تفكير ناقد:

هل تتماثل منحنيات جميع الدوال حول محور الصادات أو حول نقطة الأصل فقط؟ فسر إجابتك.

Even and Odd Functions

الدوال الزوجية والدوال الفردية:



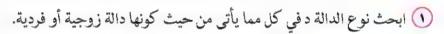
الدالة الزوجية: يقال للدالة د: س  $\longrightarrow$  ص إنها دالة زوجية إذا كان د (-س) = د (س)، لكل س ، -س  $\in$  س و يكون منحنى الدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.

الدالة الفردية: يقال للدالة د: س $\longrightarrow \longrightarrow \bigcirc$  إنها دالة فردية إذا كان د (-m) = -c (m)، لكل  $m \to \bigcirc$ و يكون منحني الدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

للحظ كثير من الدوال ليست زوجية وليست فردية

عند بحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط إنتماء العنصرين س ، -س إلى مجال الدالة، وإذا لم يتحقق كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون إيجاد د (-س)





 $\sqrt{\varphi}$  د(س) =  $\sqrt{m+m}$  جتاس  $\varphi$ 

🕥 الحل

ل د (س) = س، ، مجال د = ع

 $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .  $^{7}$ .

أى أن: د(-س) = د(س) ند دالة زوجية

ب د(س) = س، مجال د = ع

.. لکل س ، -س ∈ ع ، یکون: د(-س) = (-س)" = - س"

.: د دالة فردية أى أن: د(-س)= -د(س)

ملاحظة هامة:

تسمى الدالة د:  $q \longrightarrow q$  ، د(س) = أس نحيث  $f \neq r$  ،  $\phi \in \phi$  دالة القوى ، وتكون الدالة زوجية عندمان عدد زوجي، فردية عندمان عدد فردي.

ج د(س) = √ س + ۳ ، مجال د = [-۳ ، ∞ [

للحظ أن ٤∈ [٣٠ ، ∞ [ بينما -٤∉ [٣٠ ، ∞[

. الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

د د(س) = حتاس، مجال د = ع

. . لكل س ، -س ∈ ع يكون:

د(-س) = حتا (-س) = حتا س

أى أن: د(-س) = د(س) . . د دالة زوجية

# P

حا (-س) = - حا س حثا (-س) = حثا س طا (-س) = - طا س

#### حاول أن تحل

😯 ابحث نوع الدالة د في كل مما يأتي من حيث كونها دالة زوجية أو فردية أو غير ذلك

- ره د(س) = س<sup>۳</sup> جا س
- ه. د(س)=س<sup>۲</sup> جتا س

و د(س) = س<sup>۳</sup> جتا س (ط د(س) = جاس جتا س

(ج د(س)=س"-جاس

- (ع) د (س) = جا س + جتا س
- <u>ز</u>) د(س)=س۳+س<sup>۲</sup>

ماذا تستتج؟

### خواص هامة:

إذا كان كل من: د, ، د, دالة زوجية ، وكان كل من: ر, ، ر, دالة فردية ، فإن:

٢) ر. و دالة فردية.

١) د ، + د دالة زوجية

٤) ر×ر دالة زوجية.

۳) د × در دالة زوجية

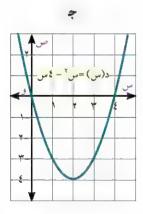
٦) در+ رب ليست زوجية وليست فردية.

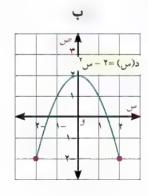
٥) د × رج دالة فردية

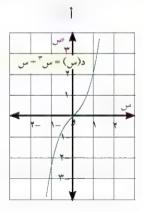
باستخدام الخواص السابقة ، تحقق من صحة إجابتك في بند حاول أن تحل (٢)

## مثال

وضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبريًّا.







#### 🛖 الحل

مجال د = ع، منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل ؛ أي أن الدالة فردية

$$(m-)+7(m-)=(m-) >,*,$$

أي أن الدالة فردية.

ب د (س) = ۲ - س، ، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن

مجال د = [-٢، ٢] ، ومنحني الدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات؛ أي أن الدالة زوجية

c(-m) = c(m) أي أن الدالة زوجية

(س) = س - عس ، من الشكل البياني للدالة د نلاحظ أن:

مجال د= ع ، ومنحني الدالة ليس متماثلًا حول محور الصادات، وليس متماثلًا بالنسبة لنقطة الأصل؛ أي أن الدالة ليست زوجية وليست فردية:

بالتبسيط

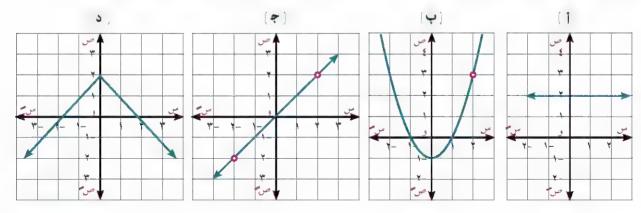
ولكن

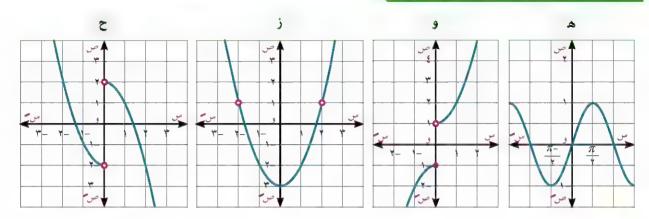
لذلك فان

أي أن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

#### 🚼 حاول أن تحل

(٣) اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.





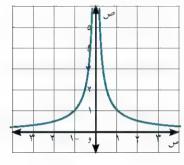
### مثال

$$c (m) = \begin{cases} \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \\ 0 \end{cases}$$

$$c (m) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$c (m) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

بين أن هذه الدالة زوجية وتحقق من ذلك جبريًّا.



#### 🚺 الحل

من الشكل البياني المجاور يتضح أن منحني الدالة متماثل حول محور الصادات؛ أي أن الدالة زوجية.

$$\cdot >$$
س عندما س  $> \cdot >$  بتبدیل کتابة القاعدتین د  $=$  (-س)  $=$  عندما س  $> \cdot >$ 

أى أن د (-س) = د (س) فالدالة زوجية.

#### 🚹 حاول أن تحل

بیانیًّا. 
$$(m) = \begin{cases} m + 7 & \text{حیث } m > -7 \\ & \text{مثِّل الدالة } c - 2 & \text{حیث } m > -7 \end{cases}$$
 بیانیًّا.

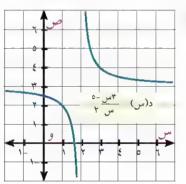
ثم بيِّن: هل الدالة زوجية أو فردية أو غير ذلك؟ وتحقق من إجابتك جبريًّا.

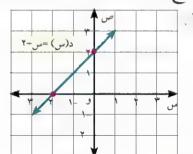
#### One - to - One Function (Injective Function)

الدالة د: س → ص تسمى دالة أحادية إذا كان:

### مثال 👩

٤ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د:سـ → ص. ، أثبت أن د دالة أحادية.





#### 贪 الحل

- ل د(س) = س + ۲ ، مجال د = ع
- لكل أ، ب ∈ ع فإن د (أ)= ۲ ، د (ب)= ب ٢
  - بوضع د (أ) = د (ب) . · أ + ٢ = ب + ٢
- ويحذف ٢ من الطرفين . . أ = ب

لذلك فإن د دالة أحادية

$$-\frac{7-9}{1}$$
 نکل ا، ب $\in 9 - \{7\}$  فإن د(ا) =  $-\frac{7+9}{1-1}$  ، د(ب) =  $-\frac{7-9}{1-1}$ 

بالضرب التبادلي ٣١٠ - ١٦ - ٥ ب ١٠٠ = ١٣ ب - ٦ ب - ١٠٠ ا

.: أ = ب لذلك فإن د دالة أحادية.

بالحذف والتبسيط

### Horizontal - Line Test إختبار الخط الأفقى



تكون الدالة د: سـ → صح دالة إحادية إذا كان الخط الأفقى (الموازي لمحور السينات) عند كل عنصر من عناصر مدى الدالة يقطع منحنى الدالة في نقطة واحدة.

#### 🚰 حاول أن تحل

في بند حاول أن تحل (٣) ص (١٩)، بين الأشكال البيانية التي تمثل دالة إحادية.

¬ أثبت أن د: س→ ص دالة إحادية حيث:

- مين أن الدالة د:س $\longrightarrow$  صحيث د (س) = س ليست دالة أحادية.
  - 🔷 الحل

$$\xi = (7) = \xi = (7) = \xi$$

... - ۲ ≠ ۲ ... د ليست أحادية

ونلاحظ أن الخط الأفقى عندص = ٤ يناظر قيمتين غير متساويتين للمتغير س هما -٢ ، ٢.

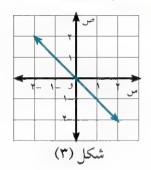
- 🚼 حاول أن تحل
- ٧ بين أن دس → صد ليست دالة أحادية

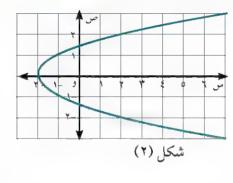
1 - (m) = m - 1

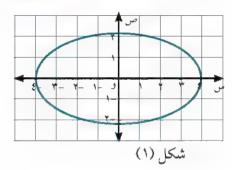
تفكير نلقد إذا كانت د زوجية فهل يمكن أن تكون د أحادية؟ فسر ذلك؟



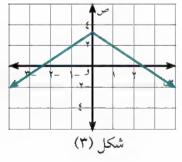
اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل ثم فسر إجابتك.

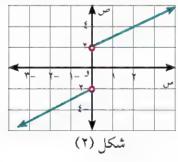


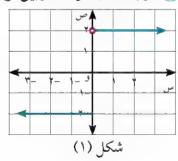


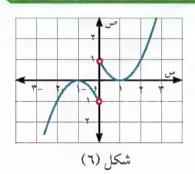


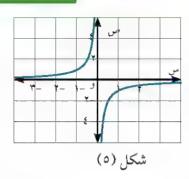
😯 أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

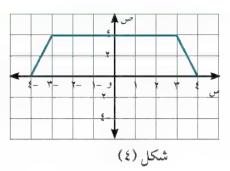












٣ ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

$$r(1+r) = (m) = \frac{m^2 + r}{m} = (m) = \frac{m^2}{1+m} = (m) = (m^2 + r)^2$$

(ع) إذا كانت د،، د، د، دوال حقيقية حيث د، (س) = س، د، (س) = حاس، د، (س) = ٥س،

فبين أي الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك

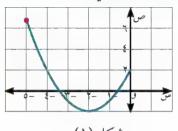
إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث د(س) = (٣ - س)٢ ، ر(س) = (٣ + س)٢

بين أي الدوال الآتية فردية وأيها زوجية وأيها غير ذلك.

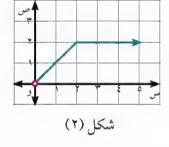
🕥 ارسم منحنيات كل من الدوال المعرفة كما يلي، ثم بين أي منها زوجية وأي منها فردية وأيها غير ذلك، وتحقق من ذلك جبريًّا.

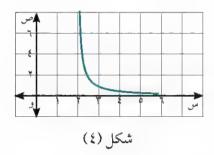
$$(w) = \begin{cases} w & -1 & \text{aixal} & w \geqslant * \end{cases}$$
 $(w) = \begin{cases} w & \text{otherwise} \\ w & \text{otherwise} \end{cases}$ 

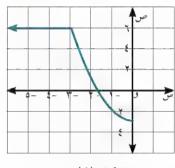
أجب عن ما يلى من خلال الأشكال الآتية:



شکا (۱)







شکا (۳)

أولًا: أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) في كراستك، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها. ثانيًا: أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) في كراستك، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثًا: حدد مجال ومدى الدالة في كل حالة وبين أي الأشكال البيانية تمثل منحني دالة احادية.

في كل من الدوال المعرفة كما يلى حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا ، مع توضيح السبب.

$$1 + 7m = (m) = 7m + 1$$

- (٩) البيط بالصناعة: يعمل سعيد في مصنع لإنتاج المصابيح الموفرة للطاقة، فإذا كان يتقاضى ٨ جنيهات أجرًا عن كل ساعة عمل بالإضافة إلى ٠,٣ جنيهًا عن كل مصباح ينتج يوميًّا.
  - أ) اكتب قاعدة الدالة د التي تعبر عن أجر سعيد إذا كان يعمل ٧ ساعات يوميًّا.
    - ب هل الدالة د أحادية؟ فسر إجابتك.
    - تفكير الحاعم: مثّل بيانيًا منحنى يحقق الشروط الآتية:
    - ل يمر بالنقط (٠٠-٢)، (٢،٢)، (٧،٣) ويمثل دالة زوجية.
    - يمر بالنقط (٠٠٠)، (-٢،١)، (-٣،٥) و يمثل دالة فردية.

### اطراد الدوال

 استخدام البرامج الرسومية مثل (Geogebra) في رسم منحني دالة

الله تزايدية. Increasing Function

◄ دالة تناقصية.

الله ثابتة.

Monotony

Decreasing Function

Constant Function

سوف تتعلم

◄ اطواد الدوال.

#### Monotonicity of Functions

# 🧩 فکر و ناقش

يوضح الشكل البياني المقابل درجات الحرارة المسجلة بمدينة القاهرة في أحد الأيام، لاحظ التغير في درجات الحرارة بالنسبة للزمن، ثم حدد من الرسم:

- ل فترات تناقص درجات الحرارة.
- ب. فترات تزايد درجات الحرارة
- م فترات ثبات درجات الحرارة.

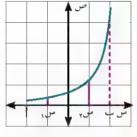
المصطلحات الأساسية

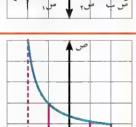
تساعدنا صفات منحنيات الدوال في معرفة سلوك الدالة د وتحديد فترات تزايد أو تناقص أو ثبوت د(س) كلما زادت س وهو مايعرف باطراد الدالة.

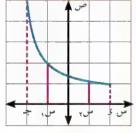
### تعلم 🔀

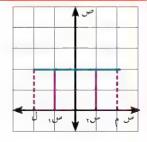
#### ترايد الدالة:

يقال للدالة د أنها تزايدية في الفترة ]أ ، ب[ إذا كان لكل س، س ، € ]أ، ب [ حيث: س > س فإن: د(س) > د(س)









#### تناقص الدالة:

يقال للدالة د أنها تناقصية في الفترة ]ج، ك[ إذا كان لكن س، ، س، ∈] ج، ك[ حيث: س، > س، فإن: د(س) > د(س)

#### ثبوت الدالة:

يقال للدالة د أنها ثابتة في الفترة ]ل ، م[ إذا كان لكن س، س ح [ ل ، م [ حيث: س > س، فإن: د(س،) = د(س)

#### الأبوات المستخدمة

◄ آلة حاسة علمة

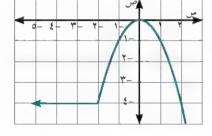
◄ برامج رسومية للحاسوب



- ١ ابحث اطراد الدالة الممثلة في الشكل البياني المقابل.
  - 🚺 الحل
  - ◄ الدالة تناقصية في الفترة ]-∞، ٠[
    - ◄ الدالة تزايدية في الفترة]٠، ٢[
      - ◄ الدالة ثابتة في الفترة ]٢،∞ [

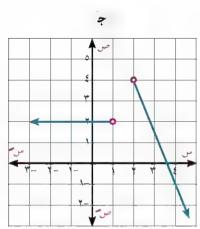
#### 🚰 حاول أن تحل

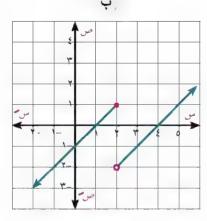
- (١) في الشكل المقابل:
- ابحث اطراد الدالة الممثلة في الشكل البياني المقابل.

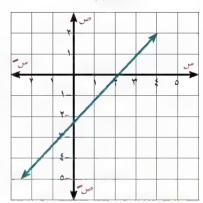


## مثال

٧ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د: سم → صم، حيث صد (س) استنتج من الرسم مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها.





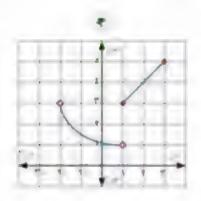


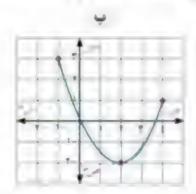
#### 🔷 الحل

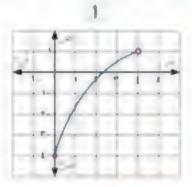
- ر مجال د =  $\alpha$  =  $\alpha$  مدی د =  $\alpha$  سر الدالة تزایدیة فی  $\alpha$  سر الدالة تزایدیة فی  $\alpha$  سرا
  - ب مجال د = ] مرا [ U [ ۲ ، مرا د = ] مرا د = ] الدالة تزايدية في ]- $\infty$ ، ۲ [ ، تزايدية أيضًا في ] ۲ ، $\infty$  [ ، مدى الدالة =  $\sigma$ 
    - ج مجال د= ] ص ، ۱ [U] ۲، ص [ ، مدی د = ] ص ، ٤ [ الدالة ثابتة في ] -∞ ، ١ [ ، وتناقصية في ] ٢ ،∞ [

#### حاول أن تحل

في كل من الأشكال التالية استنتج مجال ومدى الدالة ثم أبحث اطرادها:







والمشريد التال أن من الأشكال السابقة بمثل دالة إحادية • فسر إجابتك

#### استخدام البرامج الرسومية في دراسة خواص الدوال

تتعدد البرامج الرسومية لتمثيل الدوال بيانيًا ، ومن أشهرها برنامج GeoGebra المجاني للتابلت أو الحاسوب.

## نشاط 🐉

استخدم برنامج جيوجبرا في عمل التحويلات الهندسية للدوال

باستخدام برنامج GeoGebia مثل بيانيًّا الدالة د حيث: د(س) = س " - ٣س ٢٠ ، ومن الرسم:

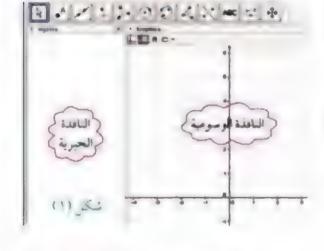
أ أوجد مجال ومدى الدالة.

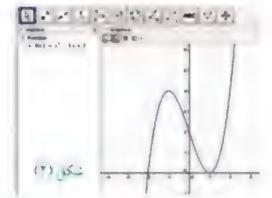
ابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها
 زوجية أو فردية أو غير ذلك.

لتمثيل الدالة بيانيًا اتبع الخطوات التالية:

افتح نافذة الجبر والرسم البياني من برنامج
 (GeoGebra)

ثم إضغط Graphics الحاق التصل إلى التصل الله النافذة المبينة في شكل (١).





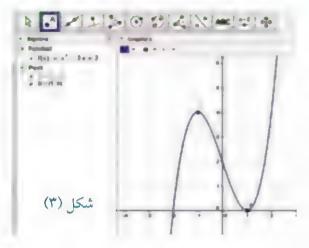
إلى النافذة الجبرية اكتب قاعدة الدالة
 د(س) = س - عس + 7 بمربع الادخال (input)
 على النحو التالى:



ثم اضغط على فيظهر في النافذة البيانية منحني الدالة، وفي النافذة الجبرية قاعدة الدالة كما في شكل (٢)

### -۳ لتحديد نقط على منحنى الدالة اختر A

من شريط الأدوات ثم نقطة جديدة من القائمة المنسدلة، حرك المؤشر حتى تصل إلى موضع النقطة المراد تحديدها على المنحنى واضغط إدخال لتظهر النقطة على المنحنى في النافذة الرسومية كما يظهر إحداثيى النقطة في النافذة الجبرية كما في شكل (٣).



### من الشكل البياني للدالة نجد:

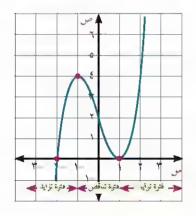
- ] مجال د= ]  $\infty$ ،  $\infty$  [ ، مدی د= ]  $\infty$ ،  $\infty$
- الدالة تزايدية في  $]-\infty -1[، تناقصية في <math>]-1 -1[، تزايدية في <math>]-1 -1[.$  كما أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

#### للحظا

النقطة (٠٠) هي نقطة تماثل لمنحنى الدالة كما أن الدالة د ليست دالة أحادية.

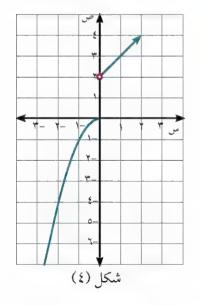
#### تحرب على النشلط

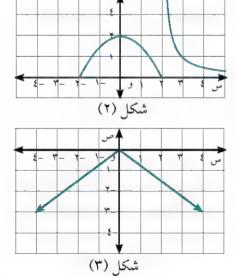
باستخدام برنامج Geogebra ارسم منحنى الدالة د: د(س) = m - m ومن الرسم ابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غدذلك.

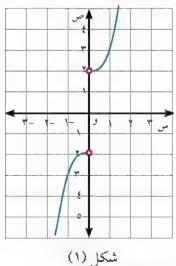




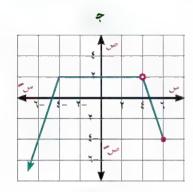
### ١ الأشكال الآتية تمثل الشكل البياني لبعض الدوال، استنتج من الرسم المدى وابحث الإطراد:

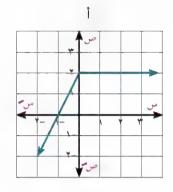


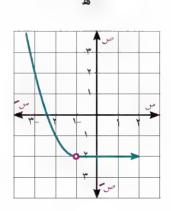


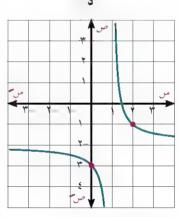


٧ حدد مجال كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ثم اكتب مدى الدالة وابحث اطرادها.









 $(w) = \{ (w) = 1 \}$  اذا کانت د:  $[-7, 7] \longrightarrow 9$  د(س) =  $\{ (w) = 1 \}$  س عندما  $\{ (w) = 1 \}$ 

أ ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

ب هل د دالة احادية؟ فسر اجابتك.

### (٤) تفكير ليداعمي

إذا كانت الدالة د في تزايد مستمر أو تناقص مستمر على مجالها هل تكون د دالة أحادية؟ فسر إجابتك.

( ) باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د في كل من ما يأتى ، ومن الرسم استنتج اطراد الدالة ومداها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

### التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية

Graphical Representation of functions, Geometriaal Transformations

#### سوف تتعلم

◄ دوال كثيرة الحدود ( الدالة

الخطية - الدالة التربيعية -

الدالة التكعيبية)

♦ دالة المقياس (القيمة المطلقة)

♦ الدالة الكسرية

استخدام التحويلات الهندسية

للدالة د في رسم المنحنيات ص = د(س) + أ

 $a_{ij} = c(m_i + 1)$ 

ص = د(س + أ) + ب

ص = د(س)

ض = أد (س)

ص أد(س+ب)+جـ

 التحويلات الهندسية لبعض الدوال المثنثية.

#### 🚺 المصطلحات الأساسية

◄ تحويل، Transformation

 ائتقال. Translation

Reflection

♦ انعكاس. ♦ رأسي Vertical

♦ أفقى Horizontal

◄ خط تقارب Asymptutes

#### الأدوات المستخدمة

◄ آلة حاسبة علمية.

◄ برامج رسومية للحاسوب.

#### Polynomial Functions الدالة كثيرة الحدود

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التي قاعدتها على الصورة:  $c(\mathbf{w}) = 1 + 1, \dots + 1, \mathbf{w} + 1, \mathbf{w} + 1, \mathbf{w} + 1, \dots + 1, \mathbf{w}$ 

حيث: إ، إ، إ، إ، إ، ..... إ ∈ ع، إ ≠ ٠، ب ∈ ط وعلمت أن المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ع (أو مجموعة جزئية منها)، وتسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة ن، ودرجة كثيرة الحدود هي أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل س.

#### للحظ:

١- إذا كان د(س) =أ ،أ خ + فإن د تسمى كثيرة الحدود الثابتة.

٢- دوال كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى دوالًا خطية ، ومن الدرجة الثانية تسمى دوالَّا تربيعية ، ومن الدرجة الثالثة تسمى دوالَّا تكعيبية.

٣- عند جمع أو طرح دوال قوى مختلفة وثوابت ، نحصل على دالة كثيرة الحدود.

 أصفار الدالة كثيرة الحدود هي الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيها مع محور السبنات.

٥- تتساوى دالتا كثيرتا الحدود د، ر إذا كان لهما الدرجة نفسها وكانت معاملات قوى س المتناظرة فيهما متساوية.

## مثال 🚮

(أ س + ه) اذا کان د ، د کشرتا حدود حیث د(س) = (أ س + ه)، ر(س) = ٩س ٢٠ - ٢٠ س + جـ - ٤ ، وكان د(س) = ر(س) أوجد قيمتي ١ ، جـ الحل.

 $(10^{\circ} + 10^{\circ})^{\circ} = (10^{\circ} + 10^{\circ})^{\circ} = (10^$ 

(m) = (m) = (m) ... معاملات قوى س المتناظرة متساوية بمقارنة معامل س: ١٠١ = ٣٠ ۳= أ .:.

.: جـ = ۲۹ بمقارنة الحد المطلق: جـ - ٤ = ٢٥

#### 🚰 حاول أن تحل

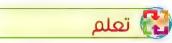
 $(1-1)^{-1} + 000 = (1+7) + 000 = (1+7) + 000 = (1-1)$ أوجد قيم أ، ب ، جـ التي تجعل د(س) = ر(س)

**Graphs of Functions** 

رسم منحنيات الدوال

**Polynomial Functions** 

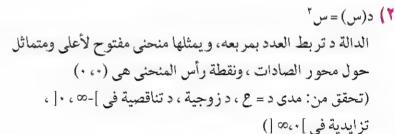
أولًا: دوال كثيرة الحدود



فيما يلي التمثيل البياني لبعض دوال كثيرات الحدود:

(س) = س الدالة د تربط العدد بنفسه، ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠،٠)، وميله = ١

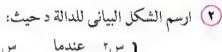
(تحقق من: مدى د= ع ، د فردية ، د تزايدية في ع)





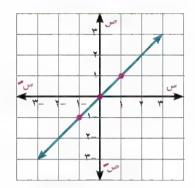
(تحقق من: مدى د= ع، د فردية ، د تزايدية في ع)

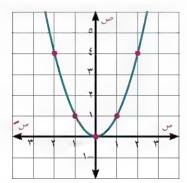


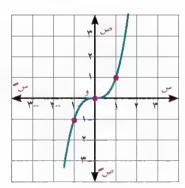


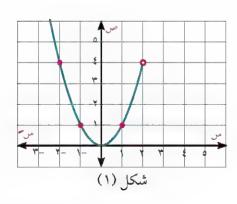
$$(w) = \begin{cases} w & \text{aixal} & w < \gamma \\ 1 & \text{aixal} & w < \gamma \end{cases}$$

# الحل 🔷

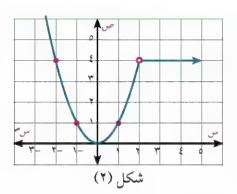








الوحدة الأولى: الدوال المقيقية ورسم المنحنيات



(س) = 3 عندما س > 7 ؛ د(س) = 3 ترسم الدالة الثابتة د(س) = 3 لكل س 
$$|7,\infty|$$
 على نفس الشكل البياني كما في شكل (٢)

 $[\cdot, \infty]$  الدالة  $c = 9 - \{Y\}$  ، ومدى  $c = [\cdot, \infty]$ 

# 🚰 حاول أن تحل

The Absolute Value Function

دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة):

أبسط صورة لدالة المقياس هي د(س) = إس|،س ∈ ع

وتعرف كما يلي:

تعلم 🔀

$$c(m) = \begin{cases} m & \text{sixal } m \geqslant * \\ m & \text{sixal } m < * \end{cases}$$

لاحظ أن: | - ١٧ | = ٢١ | = ٢ ، | ١ | = ١٠ ، ﴿ (-٢) \* = ٢ ٢ = ٢ أى أن: إس|>٠٠ إ-س |= إس|، ﴿ سُ ۚ = إسرا

الدالة د يمثلها شعاعان يبدأن من النقطة ( ٠٠ م) ميل أحدهما = ١ ، وميل الآخر = ١٠  $[-\infty, \infty]$  مدی د =  $[-\infty, \infty]$  ، د زوجیه ، د تناقصیه فی  $[-\infty, \infty]$  و تزایدیه فی  $[-\infty, \infty]$ 

# Rational Function

الدالة الكسم بة



أبسط صورة للدالة الكسرية هي:

$$\{\bullet\}$$
 -  $\emptyset$   $=$   $(m)$   $=$   $(m)$ 

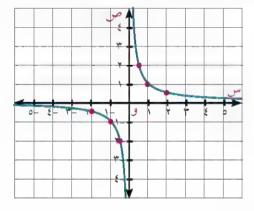
الدالة د تربط العدد بمعكوسه الضربي ، و يمثلها منحني نقطة تماثله

(٠،٠) ويتكون من جزأين أحدهما يقع في الربع الأول والآخر

يقع في الربع الثالث وكل جزء يقترب من المحورين ولايقطعهما

(س = ٠، ص = ٠ خطا تقارب للمنحني)

 $[-\infty] \cdot (-\infty)$  مدی د =  $9 - \{\cdot\}$  ، د فردیة ، د تناقصیة فی  $[-\infty] \cdot [-\infty]$ وتناقصية أيضًا في ]٠،∞[)



# 🖪 حاول أن تحل

اس | عندما س 
$$\leq \cdot$$
 ارسم الشكل البياني للدالة دحيث د(س) = 
$$\frac{1}{m}$$
 عندما س  $\leq \cdot$ 

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

شکل (۱)

# التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

أولًا: الأرّاحة الرأسية لمنحني الدالة

#### Vertical Translation

Transformations of Graphs



اعمل مع زميل

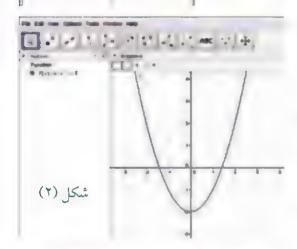
- ارسم منحنی الدالة د: د(س) = س<sup>7</sup> باستخدام برنامج Geogebra
- ٢) ضع المؤشر على رأس منحنى الدالة واسحبه رأسيًّا لأعلى وحدة واحدة ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جدیدة قاعدتها د(س) =  $m^7 + 1$  کما فی شکل (۱).
- ٣) اسحب رأس منحنى الدالة إلى النقط (٠، ٢)، (٠، ٣) وسجل ملاحظاتك في كل مرة.
- ٤) اسحب منحني د(س) = س وحدتين رأسيًّا إلى أسفل ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها  $c(m) = m^{7} - 7$  کما فی شکر (۲)
- فك بين كيف يمكن رسم د(س) = س" ٥ باستخدام منحني د(س)=س ٢٩

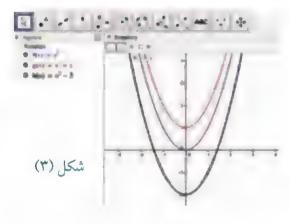
مما سبق نلاحظ أن: إذا كان:

- ١) منحنى ر(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها وحدة واحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات.
- ٢) منحني ق (س) هو نفس منحني د (س) بإزاحة قدرها ٢ وحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات.

تفكي ناقد: باستخدام منحني د(س) = س بين كيف يمكن رسم منحنيات كل من:







رب ق (س) = س<sup>۳</sup> - ۵

# 🔀 تعلم

رسم المنحني ص = د(س) + أ

لأى دالة د ؛ يكون المنحني ص = د(س) + أهو نفس منحني ص = د(س) بإزاحة قدرها أمن الوحدات في اتجاه وص ، عندما أ > ، ، و في اتجاه و ص عندما أ < ٠

44

# مثال

تبين الشكل المقابل منحنيات الدوال د، ر ، ق حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية

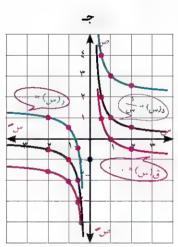
اكتب قاعدة كل من ر، ق حيث د(س) = اس

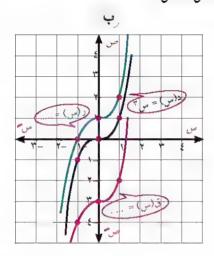
#### 🔿 الحل

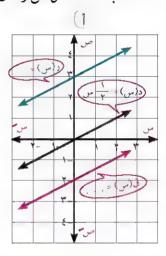
- ن. منحنى الدالة رهو نفس منحنى الدالة دبإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه وص
  - ٠٠. ر(س) = د(س) ٣
- ، . منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه وص
  - .·.ق(س) = د(س) + ۲
  - · · د (س) = اس ا · · ق (س) = اس ا + ۲

# 📊 حاول أن تحل

تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د، و، ق حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية، اكتب قاعدة كل من ر، ق في كل شكل.







Horizontal Translation

# ثانيًا: الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة

حما تعاونات

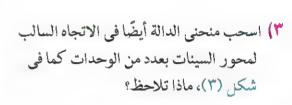
# (1) JSm

ق(س) =

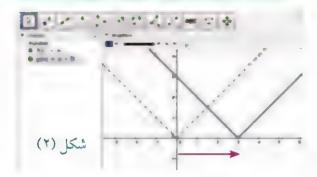
# اعمل مع زمیل:

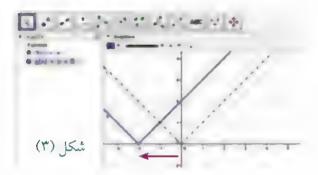
ارسم منحنى الدالة د: د(س) = |m| مستخدمًا برنامج Geogebra بكتابة قاعدة الدالة فى مربع الإدخال على النحو التالى: abs(x) النحو التالى: abs(x) النحو التالى: وقاعدتها فيظهر منحنى الدالة فى النافذة البيانية وقاعدتها f(x)=|x|

٢) اسحب منحنى الدالة أفقيًا في الاتجاه الموجب لمحور السينات بعدد من الوحدات ولاحظ تغير قاعدة الدالة في النافذة الجبرية كما في شكل (٢)



فك بين كيف ترسم منحنيا الدالتين ر ، ق باستخدام منحني الدالة دحيث: د(س) = اس ا، ر (س) = |س - ٥ | ، ق (س) = |س + ٤ |.







 $(m_1 + 1)$  رسم المنحنى ص

لأى دالة د ؛ يكون المنحني، ص = د(س ، أ) هو نفس منحني ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات في اتجاه و سُ عندما يكون أ < ٠، وفي اتجاه <u>و سُ</u> عندما يكون أ > ٠

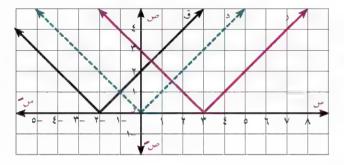
للحظ: في الشكل المقابل: د(س) = إس |:

١) منحنى الدالة رهو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه وس

... ر(س) = |س - ٣| ونقطة بدء الشعاعين (٣٠٠)

٢) منحني الدالة ق هو نفس منحني الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه وسر

.·. ق(س) = |س + ۲| ، نقطة بدء الشعاعين ( - ۲ ، ۰ )



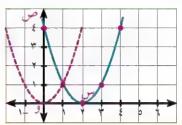
# مثال 🚮

استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س التمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

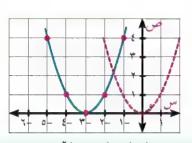
$$(w) = (w - Y)^{T}$$

#### 🕠 الحل

( '



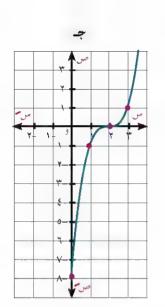
◄ منحنى ر (س) = (س - ۲) هو منحنى د (س) =  $m^7$  بإزاحة وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور السينات وتكون نقطة رأس المنحنى هي (۲،۲).

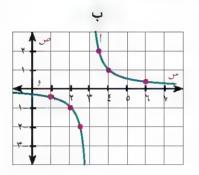


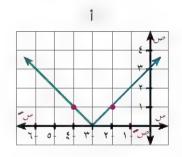
منحنى ع (س) = (س + ۳) هو منحنى درس) = س بإزاحة ٣ وحدات فى الاتجاه السالب لمحور السينات ، وتكون نقطة رأس المنحنى هى (-٣ ، ٠).

### 🚼 حاول أن تحل

- استخدم منحنی الدالة د حیث د(س) = س ٔ لتمثیل کل من الدالتین ر ، ع حیث: (س ۳) ر (س) = (س + ٤) رس (س) ع (س)  $(m-m)^{*}$ 
  - ٦ اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًّا بالأشكال التالية:







رسم المنحنى ص = د (س + أ) + ب

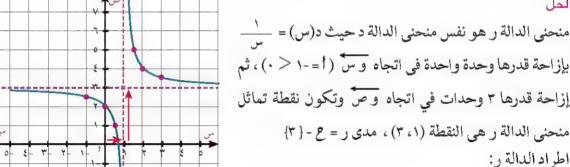
مما سبق نستنتج أن: المنحنى 0 = c(m + 1) + p هو نفس منحنى 0 = c(m) بإزاحة أفقية قدرها أ من الوحدات ( في اتجاه  $\overline{e}$  عندما 1 < r ، وفي اتجاه  $\overline{e}$  عندما 1 < r ،

# 🚼 حاول أن تحل

$$(m) = (m + 7)^{7} - 3$$

# مثال 👩

(س) ارسم منحنی الدالة رحیث ر(س) = 
$$\frac{1}{m-1}$$
 +  $\pi$  ومن الرسم حدد مدی الدالة وابحث اطرادها:



بإزاحة قدرها وحدة واحدة في اتجاه وس (أ=-١ < ٠)، ثم إزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه وص وتكون نقطة تماثل منحنى الدالة رهى النقطة (١،٣)، مدى ر = ع - {٣} اطراد الدالة:

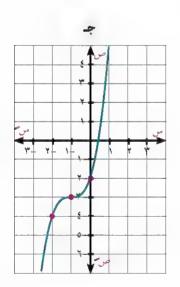
ر تناقصية في ] - ∞، ١ [ ، وتناقصيه أيضًا في ] ١ ، ∞ [

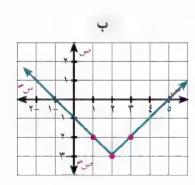
تفكير ناقد: هل يمكن القول بأن د(س) = المراج + ٣ تناقصية على مجالها؟ فسر إجابتك.

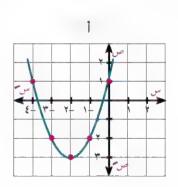
# 🛂 حاول أن تحل

استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = 
$$\frac{1}{m}$$
، لتمثيل كل من:

$$1 + \frac{1}{m + 7} = (m) \int_{\mathbb{R}^{n}} 1 dt$$









# استخدام الحاسبة البيانية في رسم الدوال

لاستخدام الحاسبة البيانية في رسم منحنى الدالة دحيث د(س) = س + ٤س + ١ اتبع الخطوات التالية:

() افتح الحاسبة واضغط MENU ثم تحرك بالأسهم على الشاشة و إختر GRAPH، اضغط EXE والذي يعد مفتاح الإدخال لتظهر لك نافذة الكتابة.

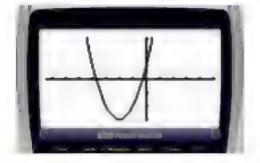


(۲) اكتب عند Y1 في نافذة الكتابة الدالة المراد رسمها حيث يستخدم مفتاح  $T, \theta, X$  لكتابة المتغير x ولذلك اضغط المفاتيح التالية:

$$[\tau,\theta,\chi \times + 4 + \tau,\theta,\chi + 1]$$

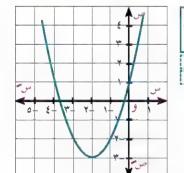


- ٣) لرسم الدالة اضغط [EXE] ← إبدأ
   فتظهر النافذة الرسومية كما في الشكل المقابل.
- ٤) استخدم مفتاح 🔘 في النافذة الرسومية لدراسة الدالة.



# للحظ أن:

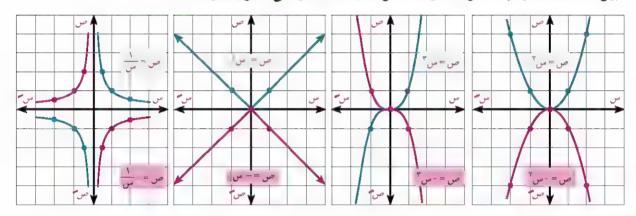
أى أن منحنى الدالة د (المعطاه) هو نفس منحنى الدالة رحيث حيث ررس) =  $m^7$  بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه  $\overline{em^7}$  ، ثم وحدات فى اتجاه  $\overline{em^7}$  و يمثله الرسم المقابل.



تطبيق باستخدام الحاسبة الرسومية ارسم منحني الدالة د حيث د(س) =  $\frac{1}{m-7}$  + ٤ ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

# ثالثًا: انعكاس منحني الدالة في محور السينات

تبين الأشكال التالية إنعكاس منحنيات بعض الدوال الأساسية في محور السينات.



ماذا تلاحظ؟ وماذا تستنتج؟



رسم المنحني ص = - د(س)

لأى دالة د، يكون المنحني ص = - د(س) هو نفس منحني ص = د(س) بانعكاس في محور السينات

# مثال

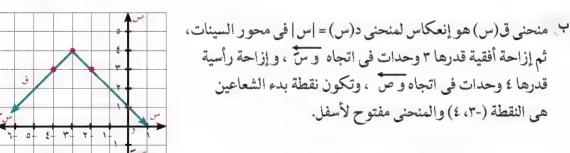
# استخدام التحويلات الهندسية في رسم منحنيات الدوال

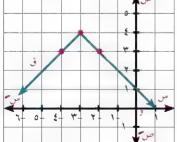
🕤 باستخدام منحنيات الدوال الاساسية ارسم منحنيات الدوال ر ، ق، ع حيث:

$$(m-m) = (m-m)^{-1}$$

# 🚺 الحل

منحني ر(س) هو إنعكاس لمنحني د(س) = س محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات في اتجاه وس ، وتكون نقطة رأس المنحنى هي (٣، ٠) والمنحني مفتوح إلى أسفل.



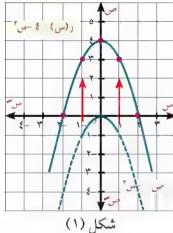


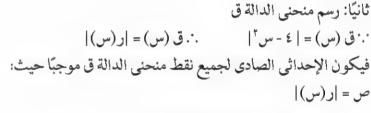


ثم تحقق من صحة الرسم باستخدام أحدالبرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية.

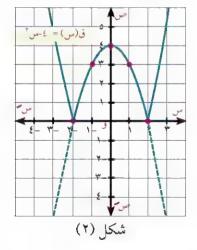
#### مثال 🦰 استخدام التحويلات الهندسية في رسم منحنيات الدوال

### 👩 الحل



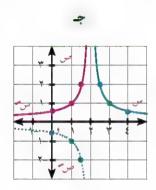


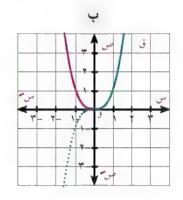
أى أن منحني الدالة ق يقع في الربعين الأول والثاني فقط وهذا يعني إنعكاسًا لمنحني الدالة ر لكل ر(س) < • في محور السينات كما في شكل (٢).

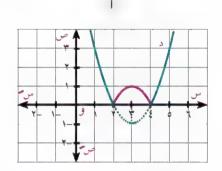


# 🚹 حاول أن تحل

🕦 تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د، ق، ر اكتب قاعدة الدالة في كل شكل:







Expanding of graphs

رابعًا: تمدد منحني الدالة:

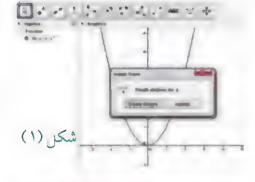
# حمنولعت لمح 🔇

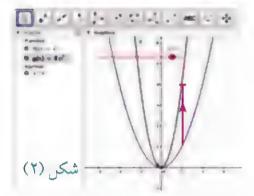
رسم منحني ر(س) = أ د (س) اعمل مع زميل.

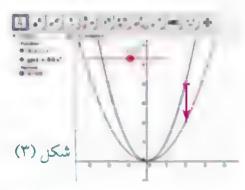
() ارسم منحنى الدالة د: د(س) = س باستخدام برنامج Geogebra وفي مربع الإدخال اكتب قاعدة الدالة رعلى النحو التالي:

لتظهر لك نافذة جديدة (شكر ١)

اختر منها Create sliders







 ۲) استخدم مؤشر قیم a لاختیار قیم أخرى لها حیث ۱ ولاحظ حركة منحنى الدالة ربالنسبة لمنحنى الدالة د لكل س ∈ ع كما في شكل (٢) وعندما ١ < a كما في شكل (٣) ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج؟

# تعلم 🚰

رسم المنحني ص = أد (س) لأى دالة د ؛ يكون المنحني ص = أد(س) هو تمدد رأسي لمنحنى ص = د(س) إذا كان أ > ١، و إنكماش رأسي لمنحني 0 = c (س) إذا كان c < 1 < 1

(u + v) = 1 (v + v) v + v

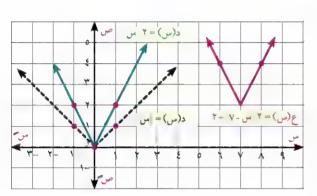
# مثال

# استخدام التحويلات الهندسية في رسم منحنيات الدوال

 استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س | لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع: (پ) ع(س) =۲ اس - ۷ ا + ۲ ل ر(س) = ۲∣ س|

#### 🕠 الحل

- لَ منحني ر(س) هو تمدد رأسي لمنحني الدالة د معاملةأ = ٢ > ٠ وعلى ذلك فإن: لکل (س ، ص) ∈ بیان د یکون (س، ۲ ص) ∈ بیان ر
- ب منحنی ع(س) هو نفس منحنی ر(س) بإزاحة أفقية قدرها ٧ وحدات في اتجاه وس ، وإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه وص



# 🚰 حاول أن تحل

(۱۷) استخدم منحني الدالة د حيث د(س) = س<sup>۲</sup> لتمثيل الدالتين ر ، ع:

( w) = ( m - 0) } آ) ر (س)=- √س۲

تحقق من صحة الرسم باستخدام أحد البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية ثم حدد مدى الدالة ع و ابحث اطرادها.



تطبيق التحويلات الهندسية التي درستها في الدوال الجبرية السابقة على دوال الجبب وجبب التمام؟

Trigonometric functions

الدوال المثلثية (منحني دالة الجيب)

First: Translation on X - axis

أولًا: الإزاحة في اتجاه محور السيئات

- (١) استخدم برنامج جيوجبرا (GeoGebra) وأعد البرنامج بحيث يكون التدريج على محور السينات بالراديان، وذلك بأن تضغط بالفأرة (كليك يمين)، وتختار منها في آخر سطر محور الفاصلات (السينات) x، ثم تختار منه نظام التدريج  $(\pi)$ .
- Y) في أسفل البرنامج (كتابة الأوامر) اكتب الأمر: (xin (x) ثم اضغط (enter) فتعطى لك شكل المنحني الأحمر، تستطيع التحكم في اللون وسمك المنحني، وذلك بالضغط على المنحني بالفأرة (كليك شمال)، فيظهر في أعلى النافذة اللون وسمك الخط وشكل الخط منقط، شرطي، متصل ،...).
- (enter) بنفس الطريقة السابقة اكتب الأمر:  $\sin(x + (\pi/3))$  أي:  $\cos(x + (\pi/3))$  ثم اضغط ( $\sin(x + (\pi/3))$  ولون هذا المنحني بلون آخر.

# ٤) قارن بين المنحنيين. ماذا تلاحظ؟

من الرسم نستنتج أن:

تم إزاحة منحنى دالة الجيب أفقيًّا جهة اليسار على محور السينات بمقدار يساوى  $\frac{\pi}{r}$  (كما في الدوال الحقيقية)، ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو [-1:1] وهو نفس

مدى الدالة جاس، كما نلاحظ أن الدالة جا (س +  $\frac{\pi}{\psi}$ ) ليست زوجية وليست فردية؛ لأنه لايوجد تماثل لمنحناها حول محور الصادات أو نقطة الأصل.

### فکر

 $\Rightarrow$  ماذا تتوقع أن يكون اتجاه الإزاحة السينية إذا كانت قاعدة الدالة هي: جا (س -  $\frac{\pi}{n}$ ).

# ثانيا: الإزاحة في اتجاه محور الصادات Second: Translation on Y –axis

١) ارسم منحنى الدالة دحيث د(س) = جاس كما سبق.

۲) ارسم منحنى الدالة رحيث ر(س) = جاس ۲۰
 بلون آخر وقارن بين شكل المنحنيين. ماذا تلاحظ؟
 من الرسم نستنج أن

منحنى الدالة الثانية هو نفسه منحنى الدالة جاس، بعد إزاحته بمقدار وحدتين لأعلى.

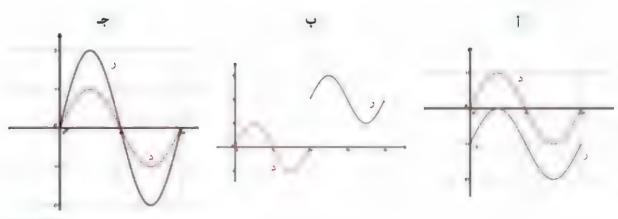
وبلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو [١، ٣]؛ لأنه تم إزاحته بمقدار وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور الصادات عن الدالة الأولى، وأن الدالة جاس + ٢

ليست زوجية وليست فردية.

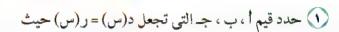
# تفكير ناقد:

في كل من الأشكال الآتية:

صف التحويلات الهندسية لمنحنى الدالة د والتي ترسم منحنى الدالة ر، ثم اكتب قاعدة الدالة ر بدلالة د وحدد مداها وابحث اطرادها.



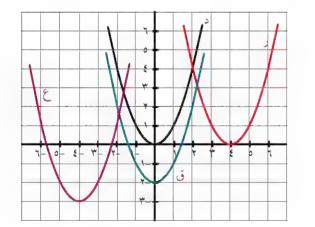




٧ ارسم منحني الدالة د ، ومن الرسم حدد مداها وابحث اطرادها

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

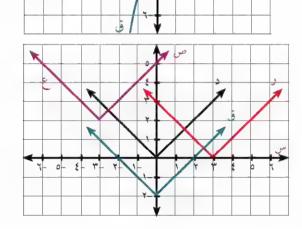
- (ق نقطة رأس منحنى الدالة د(س) = (٢ س)٢ + ٣ هي: (٢ - ٢ - ٣ ) (٣ - ٢ - ٣ ) (٣ - ٢ - ٣ )
- (\*\*) is distributed in the content of the content



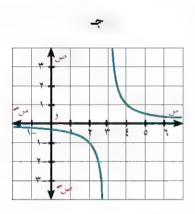
√ رسم منحنى الدالة دحيث د(س) = س<sup>7</sup> ثم أزيح فى
 اتجاه محورى الإحداثيات
 كما فى الشكل المقابل.
 اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:
 ◄ ر، ق، ع

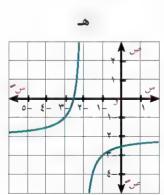
- - رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س|
    ثم أزيح في اتجاه محورى الإحداثيات
    كما في الشكل المقابل.

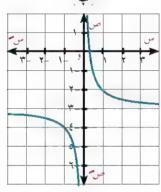
اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية: ◄ ر، ق، ع

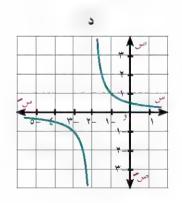


ن رُسم منحنى الدالة د حيث د(س) = ﴿ مَ أَرْيح في اتجاه محورى الإحداثيات . اكتب قاعدة كل دالة التي تمثلها المنحنيات الآتية:

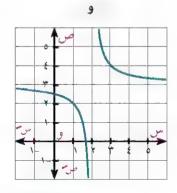








( )



$$1 + r_{0} = (m) = m^{2} - 2$$

$$\frac{1}{7} - \frac{7}{7} = \frac{7}$$

(ج) د<sub>س</sub>(س) = (س + ۱)

$$(-1)^2 - (-1)^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = ($$

◄ ثم أوجد إحداثيات نقط تقاطع المنحنيات مع المحورين.

$$(w) = c(w) - c(w) = c(w) + (w) + (w) = c(w) + (w) + (w) + (w) = c(w) + (w) +$$

🗲 ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.

استخدم منحنى الدالة د حيث د حيث د (س) = س التمثيل ما يأتي بيانيًا:

$$(m+m)^{2} = 2 - m^{2}$$
 $(m+m)^{2} = (m-m)^{2}$ 

استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = إس التمثيل ما يأتي بيانيًا.

$$|Y-|w| = |Y-|w|$$
 $|Y-|w| = |W-|w|$ 
 $|Y-|w| = |W-|w|$ 

🐠 ارسم منحني الدالة د في كل مما يأتي باستخدام التحو يلات المناسبة ثم ابحث اطرادها

$$\frac{\gamma_{m}}{1+m} = m |m| - 1$$

اذا كانت الدالة د حيث د(س) =  $\frac{1}{m}$ ، فارسم الشكل البياني للدالة ل في الحالات الآتية:

$$[U(m) = |c(m)|$$

(١٩) ارسم منحني الدالة د ، وحدد مداها إذا كان:

 $[1] c(m) = \sqrt[4]{m^7 - 4m} - 7m - 7| m \in [-1, 3]$ 

- ﴿ اللبط مع التحارق: يدفع تاجر غلال ٥٠ جنيهًا عن كل طن يدخل أو يخرج من مستودعه كأجر تحميل أو تنزيل، اكتب الدالة التي تمثل تكاليف التحميل أو التنزيل ومثلها بيانيًّا.
- (٢) البيط مع المبكلنيكا: يقطع جسم مسافة ف مترًا في ٣ دقائق إذا تحرك الجسم بسرعة ثابتة مقدارها ٣٠ مترًا/ دقيقة، بين أن سرعة الجسم ع تتغير عكسيًّا بتغير الزمن (ن) لقطع هذه المسافة ، واكتب الدالة التي تمثل السرعة والزمن ومثلها بيانيًّا ثم أوجد زمن قطع هذه المسافة اذا تحرك الجسم بسرعة ٤٥ مترًا / دقيقة.
- المحتمعات العمرانية: خصصت قطع أراضي مستطيلة الشكل لإسكان الشباب بإحدى المجتمعات العمرانية الجديدة ، فإذا كان طول كل منهاس متراً، ومساحتها ٤٠٠ مترًا مربعًا.

أ) بين أن طول قطعة الأرض يتناسب عكسياً مع عرضها.

ب اكتب قاعدة الدالة د التي تبين عرض قطعة الأرض بدلالة طولها ومثلها بيانيًا.

ج أوجد من الرسم عرض قطعة الأرض التي طولها ٢٥ متراً وتحقق من ذلك جبريًّا.

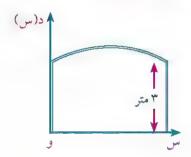
# تفكير الداعمي:

👣 إذا كان س، ، سر، أصفارًا للدالة د: د(س) = (س - أ) المحيث س، حسر، وكان س، ، س، أصفارًا للدالة ر: ر(س) = ٥ - (س - أ) حيث س < س > أ+ و ع فأى العبارات التالية صحيحة:

 $\mathbb{L}_{\mathsf{w}} > \mathbb{L}_{\mathsf{w}} > \mathbb{L}_{\mathsf{w}}$ 

 $_{2}$   $_{2}$   $_{3}$   $_{2}$   $_{3}$   $_{4}$   $_{2}$   $_{3}$   $_{4}$   $_{4}$   $_{5}$   $_{4}$   $_{5}$   $_{4}$   $_{5}$   $_{6}$   $_{7}$   $_{7}$   $_{7}$   $_{7}$   $_{8}$   $_{7}$   $_{7}$   $_{8}$   $_{7}$   $_{7}$   $_{8}$   $_{7}$   $_{8}$   $_{7}$   $_{8}$   $_{7}$   $_{8}$   $_{7}$   $_{8}$   $_{7}$   $_{8}$   $_{7}$   $_{8}$ 

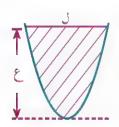
ج سي < س > س > س



🗱 البيط مع الصناعة: صممت بوابة حديدية ارتفاع جانبيها ٣ أمتار وقوسها على شكل جزء من منحني الدالة د: د(س) = أ (س ٢٠) + ٤ كما في الشكل المقابل. أوجد:

ا) قيمة ا

- 😲 أقصى ارتفاع للبوابة
- ج. عرض البوابة



- (٢٥) البيط مع الهندسة: إذا علمت أن مساحة الشكل المحصور بين منحني الدالة التربيعية والقطعة المستقيمة الأفقية المرسومة بين أي نقطتين عليه والموضحة في الشكل المقابل تعطى العلاقة م $=\frac{7}{6}$  ل ع
  - [] أوجد مساحة الشكل المحصور بين محور السينات ومنحنى الدالة د:د(س) =  $m^{7}$  - 7س + 0 بالوحدات المربعة
- على نفس الشبكة البيانية منحيي الدالتين د، رحيث ر(س) = إس ١٣ ٢ ثم أوجد مساحة الجزء المحصور بينهما بالوحدات المربعة.

# حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

Solving Absolute Value Equations and Inequalities

# أولًا: حل المعادلات

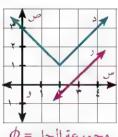
### فكر وناقشي

مثل بيانيًّا في شكل واحد منحنيي الدالتين د، رحيث د دالة مقياس، و دالة خطية. لاحظ الرسم ثم اجب:

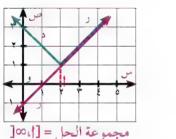
- (1) ما عدد نقط التقاطع المحتمل لمنحنيي الدالتين معًا؟
- (٤٠) إذا وجدت نقط تقاطع للمنحنيين معًا، هل تحقق الأزواج المرتبة لها قاعدة كل من الدالتين ؟
  - ج استخدم الحاسبة البيانية في التحقق من صحة إجابتك.

### للحظ أبي

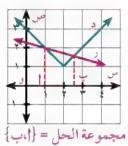
- (١) عند نقط التقاطع (إن وجدت) يكون: د(س) = ر(س) ، والعكس صحيح لكل س تنتمي إلى المجال المشترك للدالتين.
- (w) = (w) = (w) لأى دالتين د، ر تكون مجموعة حل المعادلة د(w) على مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيهما كما توضحه الأشكال التالية:







مجموعة الحا = { أ}



حل المعادلة: | أس – ب | = جـ

# مثال 👩

حل المعادلة: اس - ٣ | = ٥ بيانيًا وجبريًا.

#### سوف تتعلم

- حن معادلات المقياس بيانيًا
- ◄ معادلات المقياس جبريًا
- حن متباينات المقياس بيائيًا.
- ◄ حن متباينات المقياس جبريًا
- نمذجة مشكلات و تطبيقات
- حياتية وحلها باستخدام معادلات ومتباينات المقياس

#### المصطلحات الأساسية

Equation ♦ معادلة.

 متبایئة، inequality

Graphical Solution ا حن بياني.

# الأدوات المستخدمة

- ◄ آلة حاسبة رسومية
- ◄ ورق رسم بياني
- ◄ برامج رسومية للحاسوب.

#### 🔷 الحل

- ا نرسم منحنى الدالة د:د(س) = |س ۳ | بإزاحة منحنى
   د(س) = |س | ثلاث وحدات في اتجاه وسَ
- کلی نفس الشکل نرسم ر(س)= ۵، حیث ر دالة ثابتة یمثلها مستقیم یوازی محور السینات و یمر بالنقطة (۰، ۵)
- ٠٠ المنحنيين يتقاطعان في النقطتين (٢٠،٥) ، (٨،٥)
  - .. مجموعة حل المعادلة هي: {-٢ ، ٨}

#### الحل الجبرى:

$$m \geqslant m$$
 عندما  $m \geqslant 7$  من تعریف دالة المقیاس:  $c(m) = \{m-m\}$  عندما  $m > 7$  عندما  $m > 7$  عندما  $m > 7$ :  $m-m=0$  أي أن:  $m = \Lambda \in [T, \infty[$ 

عندما س 
$$< \pi : - س + \pi = 0$$
 أى أن:  $m = - \pi \in [1, \infty]$  عندما س  $< \pi : - m + \pi = 0$  أى أن:  $m = - \pi \in [-\infty, \pi]$  مجموعة حل المعادلة هى:  $\{ - \tau : \Lambda \}$  وهذا يطابق الحل البياني.

# 🚹 حاول أن تحل

(١) حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا وجبريًّا.

Properties of the Absolute Value

بعض خواص مقياس العدد



$$|\Upsilon \times - \Upsilon| = |-\Gamma| = \Gamma \quad \text{ , } \quad |\Upsilon| \times |-\Upsilon| = 7 \times 7 = \Gamma$$

و يحدث التساوي فقط إذا كان العددان أ ، ب لهما نفس الإشاره فمثلًا:

$$\mathfrak{R} = \left| \begin{smallmatrix} 0 \end{smallmatrix} - \right| + \left| \begin{smallmatrix} \xi \end{smallmatrix} - \right| = \left| \begin{smallmatrix} 0 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} \xi \end{smallmatrix} - \right| \qquad \text{$\zeta$} \qquad \mathfrak{R} = \left| \begin{smallmatrix} 0 \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} \xi \end{smallmatrix} \right| = \left| \begin{smallmatrix} 0 \end{smallmatrix} + \left| \begin{smallmatrix} \xi \end{smallmatrix} \right|$$

# للحظا

# = حل المعادلة |أس + ب|

# مثال

🚺 الحل

## الحل البيائي:

$$c: c(m) = |Ym - T| = |Y(m - \frac{T}{T})|$$

$$|\frac{\pi}{\tau} - \omega| \quad \Upsilon = (\omega)$$
 . . .

منحني د هو نفس منحني ٢ إس إ بإزاحة أفقية

قدرها 
$$\frac{\pi}{7}$$
وحدة في اتجاه و س

ر: ر(س) = س + 
$$\pi$$
 و يمثلها خط مستقيم ميله = ۱ و يمر بالنقطة (۰،  $\pi$ )

ن عندما س
$$\geqslant \frac{\pi}{2}$$
 تکون ۲س-۳=س ۳۰ ومنهاس  $= \pi \in [\frac{\pi}{2}, \infty[$ 

$$\frac{\pi}{2}$$
, ∞-[∋·= m+7 easily m=·∈]-∞,  $\frac{\pi}{2}$ [

.٠. مجموعة حل المعادلة هي: (\* ، ٢)

# 🚹 حاول أن تحل



#### 🚺 الحل

بوضع د(س) = |س -۳| ، ر(س) = |۲ س +۱|
منحنی د: هو نفس منحنی |س| بإزاحة قدرها ۳ وحدات
فی اتجاه و س
ر:ر(س) =۲ |س + 
$$\frac{1}{7}$$
 |
منحنی ر هو نفس منحنی ۲ |س | بإزاحة أفقیة قدرها  $\frac{1}{7}$ 

منحني رهو نفس منحني ٢ إس إ بإزاحة أفقية قدرها لل وحدة في اتجاه وسن ، ويكون نقط تقاطع منحنيا الدالتين د ، ر هي:  $(-3, \forall)$  ،  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ مجموعة حل المعادلة هي  $\{-3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ 

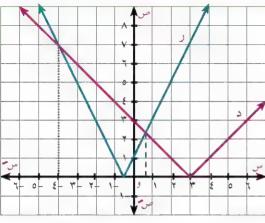
# 🚰 حاول أن تحل

- (٣) حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا.
  - $|\nabla V + \nabla V| = |\nabla V + \nabla V|$



🕥 الحل

- أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:
  - اً اس + ۷] = اس − ۵|



# رب اس - ۲ | + | س - ۲ | = صفر

(4) A my + 7 my + 9 = 9 - 7 mg

إذا كان أ، ب ∈ ع وكان |أ = |ب | ظان: أ = ± ب

# التحقيق:

# فكيت

حل المعادلة السابقة بتربيع طرفيها، ثم تحقق من صحة الحل.

لأي عدد حقيقي أيكون: 

# أى أن: ٠٠. إس - ٣ | = ٩ – ٢س

$$mY - 9 = {}^{Y}(W - W) \downarrow .$$

.. مجموعة الحل هي [٤]

#### فكد

١) هل يمكنك استخدام طرق جبرية أخرى لإيجاد حلِّ للمعادلة ؟ وضح ذلك.

# 🚹 حاول أن تحل

أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

تطبيقات حياتية على حل المعادلات

#### مثال 📆 تخطيط المدن

 قطعة أرض محصورة بين منحنيي الدالتين د ، س حيث: c(m) = |m-T| - 7 ، c(m) = 7 ، احسب مساحتها بالوحدات المربعة و إذا كان طول الوحدة ٨ أمتار إحسب مساحة الأرض بالأمتار المربعة.

#### 🛖 الحل

بتمثيل منحيي الدالتين دء مربيانيا نجد انهما يتقاطعان في النقط أ (-٣،٢) ، ب (٣،٨) ، و تكون قطعة الأرض على شكل المثلث أب جالقائم الزاوية جحيث أ ب = ۸-(۲-)-۱۰ وحدات

حـ ک = ۳-(۲-)=۵ وحدات

.. مساحة △ب اج= اب×ج

 $\frac{1}{2}$  × ۱۰ × ۵ = ۵۲ وحدة مربعة مساحة قطعة الأرض  $= 20 (A \times A) = 17$  متراً مربعًا.

# 🚰 حاول أن تحل

 أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين د ، س حيث: د(س) = اس-۱ - ۱ ، مرس =٥- اس-۱ ا

#### مثال 贪 شبكات الطريق

طريقان الأول يمثله منحنى الدالة د حيث د(س) = إس-ه | ، و الثاني يمثله منحنى الدالة مرحيث س (س) =٥ - 🕆 س، اذا تقاطع الطريقان في نقطتي أ، ب أوجد المسافة بين أ،ب لأقرب كيلو متر اذا كانت وحدة الأطوال تمثل مسافة قدرها ٥ كيلومترات.

#### 🥎 الحل

یتقاطع الطریقان عندما د(س)=  $\sim$ (س)، و یکون اس-ه = ه -  $\frac{7}{9}$  س



كتاب الرياضيات البحثة - علمي - الصف الثاني الثانوي

أو س - ه = 
$$\frac{7}{7}$$
 س - ه

$$\overline{17}\sqrt{7} = \sqrt{700} = \sqrt{700} = \sqrt{700}$$

أي

.. وحدة الأطوال تمثل ٥ كيلومترات

ن المسافة بين أ ، ب = ٥× ٢ م $\overline{17}$  = ١٠ م $\overline{17}$   $\simeq$  77 كم



# نشاط 🛞

اذا سقط شعاع الضوء على سطح عاكس فإن مساره يخضع لدالة المقياس فيكون قياس زاوية السقوط مساوياً لقياس زاوية البلياردو قبل و بعد تصادمها مع حافة الطاولة في بعض الحالات.

# ١) يوضح الشكل المقابل:

تصویب لاعب البلیاردو علی الکرة السوداء، باعتبار وس ، و ص محوري الاحداثیات المتعامدة، وأن مسار الکرة یتبع منحني الدالة دحیث:  $c(m) = \frac{3}{7} |m-o|$ 

هل تسقط الكرة السوداء في الجيب ب؟ فسر إجابتك رياضيًّا.



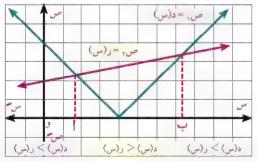
# 🚹 حاول أن تحل

في المثال السابق تحقق من نقط التقاطع بحل المعادلتين بيانيًّا.

#### Solving the Inequalities

ثانيا؛ حل المتباينات

سبق أن درست المتباينات، وعلمت أن المتباينة هي عبارة رياضية تحتوي أحد الرموز: (<,>) < > > > > المقصود بحل المتباينة هو إيجاد القيمة أو مجموعة القيم للمتغير التي تجعل المتباينة صحيحة.



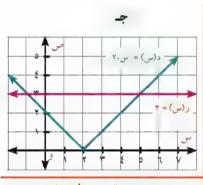
# حل المتباينات بيانيًّا

یبین الشکل المقابل منحنی کل من الدالتین د، رحیث:  $ص_1 = c(m)$  ، c(m) ، c(m) و تکون مجموعة حل المعادلة c(m) = c(m) هی  $\{ \mathring{f} : \psi \}$ 

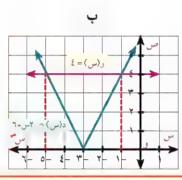
أى أن: ص، = ص، عندما س = أ أو س = ب

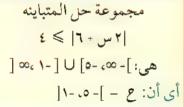
ويلاحظ: ص > ص أي د(س) < ر(س) عندما س ∈ ] أ ، ب [ ص > ص أي د(س) > ر (س) عندما س∈ ] - ∞ ، أ[ ∪] ب ، ∞[

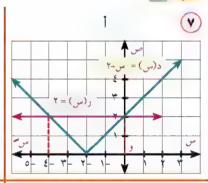
# مثال



مجموعة حل المتباينه اس - ۲ | ≤ ۳ هي: [-١، ٥]



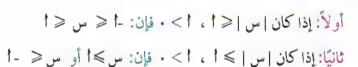




- مجموعة حل المتباينه اس+۲ | ۲ > ۲ هي:] - ٤ ۽ +[
  - 🚰 حاول أن تحل
- أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية مستعينًا بالأشكال البيانية في مثال (٧):

حل المتباينات جبريًا







- مثال 👩
- أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية: £ ≤ 1+m7-7m k. 4 ا |س-۳| < ٤ Y ≤ 1/- 1/- >
  - 贪 الحل



لکل من أ، ب، چ إذا كان: أ < ب ، ب < ج فإن أ < ج إذا كان: أ < ب فإن ا+ جد < ب + جد اج<بجعندج>٠ أج>ب جعدد ج إذا كان أ ، ب موجبتان ، ا < ب فإن 🕂 > ا

$$r + \frac{1}{r} > r + r - mr > r + \frac{1}{r} - r$$

$$\therefore -\frac{1}{7} \leq 7$$
س –  $7 \leq \frac{1}{7}$  وبإضافة  $7$  إلى المتباينة

140 = 144 + 194

# $\therefore$ مجموعة حل المتباينة هي $\left[\frac{\diamond}{7}, \frac{\lor}{7}\right] - \left[\frac{\lor}{7}\right]$

# 🗗 حاول أن تحل

مثال 🚮

# أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

# (تطبيق حياتي على حل المتباينة)

# آسمح إحدى شركات الغاز الطبيعي بتوظيف قارئ العداد اذا كان طوله يتراوح بين ١٧٨سم ، ١٩٢٠سم. عبر عن الأطوال الممكنة لمن يتقدم لشغل هذه الوظيفة بمتباينة القيمة المطلقة.

# 🕥 الحل

بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة =س سم حیث ۱۷۸ ﴿ س ﴿ ۱۹۲ ، بإضافة -۱۸۵ الی أطراف المتباينة.

# 

### 🚼 حاول أن تحل

- اكتب متباينة القيمة المطلقه التي تعبر عن:
- ال درجة طالب في اختبار ما تراوح بين ٦٠ الي ١٠٠ درجة.
- ع درجة حرارة مقاسة بالترمومتر الطبي يتراوح بين ٣٥ °C درجة حرارة مقاسة بالترمومتر الطبي
- م توجد الطحالب الخضراء في المحيطات على عمق يصل إلى ٣٠ مترًا.

تفكير ناقد: اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كل مما يأتي:



# أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

۷= | ۳− س | ۷۰

۷ = ۲ - ۳ س | = ۷

# أوجد بيانيًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الأتية:

# أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية بيانيًّا:

# أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الأتية جبريًّا:

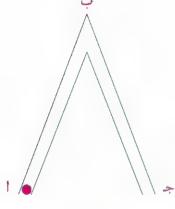
$$T \leq \frac{1}{10 - mT}$$
  $(9)$   $17 > |m = -7| + |T - mT|$   $(7)$ 

لمزيد من الترارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

# (۳) البيط بالمتكلنيكك

يتحرك جسم بسرعة منتظمة مقدارها ٨سم/ث من الموضع أ إلى الموضع جـ مرورًا بالموضع ب دون توقف ، وكانت المسافة بين الجسم و الموضع ب تحسب بالقاعدة ف (ن) = ٨ |٥ - ن | حيث ن الزمن بالثواني ف المسافة بالسنتيمترات.

أ احسب المسافة بين الجسم و الموضع ب بعد ثانيتين و بعد ٨ ثوان ماذا تلاحظ؟ فسر إجابتك



٣ | س + ۲ | = ٣ س - ۱۰

۲- س - ۲ | = ۳ س - ٤

(۱۲) اس - ۲ | = ۳ س - ٤

10 | س + ۲ | = | س - ۳

٣< | به - ١ (١٨)

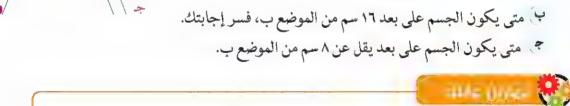
Y ≤ | 0 - m Y | (Y1)

۲€ | ۷- س ۲ | ₹٤

 $Y < \frac{1}{|Y = WY|}$ 

9 ≥ 9 + m17 - 7m2 1 (TV)

9 = m7 + 7 + m7 - 7 m 4



#### ملخص الوحدة

ا الدالة هى علاقة بين مجموعتين غير خاليتين سه ، صه بحيث يكون لكل عنصر من عناصر سه عنصرًا وحيدًا من عناصر صه ، وتكتب رمزيًّا بالصورة د: سه → صه ، وتتحدد الدالة بثلاثة عناصر هى: المجال المقابل، وقاعدة الدالة.

وتسمى الدالة د دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.

- Y اختبار الخط الرأسى: إذا مثلت علاقة بمجموعة من النقاط في مستوى احداثي متعامد وقطع الخط الرأسي عند كل عنصر من عناصر المجال تمثيلهما البياني في نقطة واحدة فقط فإن هذه العلاقة تمثل دالة.
  - ٢ دالة متعددة التعريف: هي دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.
    - العمليات على الدوال: إذا كانت در، در دالتين مجالاهما مر، مر فإن:

 $\triangleright$   $(c_1 \pm c_4)$   $(m) = c_1$   $(m) \pm c_4$  (m)

 $\triangleright$   $(c_1, c_4)$   $(m) = c_1$  (m).  $c_4$ (m)  $c_4$ (m)

 $> \left(\frac{c_{\gamma}}{c_{\gamma}}\right)(m) = \frac{c_{\gamma}(m)}{c_{\gamma}(m)} c_{\gamma}(m) \neq 0$  and  $(\frac{c_{\gamma}}{c_{\gamma}})(m) = \frac{c_{\gamma}(m)}{c_{\gamma}(m)} c_{\gamma}(m) \neq 0$  and  $(c_{\gamma})(m) = \frac{c_{\gamma}(m)}{c_{\gamma}(m)} c_{\gamma}(m) + 0$ 

حيث ف (دم) مجموعة أصفار دم

- تركیب الدوال إذا كان مدى الدالة د مجموعة جزئية من مجال الدالة ر فيمكن تركیب الدالة ع من الدالتين ، د ، رحیث ع = ر د و تقرأ ر تركیب د و یكون ع(س) = (ر د) (س) = ر [د(س)]
  - ألدالة الزوجية والدالة الفردية:

الدالة الزوجية: يقال للدالة د: س  $\longrightarrow$  ص إنها دالة زوجية إذا كان د(-س) = د(س) لكل س ، -س  $\in$  س. الدالة الفردية: يقال للدالة د: س  $\longrightarrow$  ص إنها دالة فردية إذا كان د(-س) = -د(س) لكل س ، -س  $\in$  س.

الدالة الأحادية: الدالة د: س $\longrightarrow$  ص $\longrightarrow$  ص $\longrightarrow$  تسمى دالة أحادية إذا كان: لكل أ، ب $\in$  س $\in$  و د( أ) = د(ب) فإن أ= ب أو لكل أ  $\neq$  ب فإن د(أ)  $\neq$  د(ب)

- الموازى لمحور السينات  $\wedge$  اختبار الخط الأفقى: تكون د: س $\rightarrow$  ص $\rightarrow$  دالة أحادية إذا كان الخط الأفقى (الموازى لمحور السينات عند كل عنصر من عناصر مدى الدالة يقطع منحنى الدالة في نقطة واحدة.
- اطراد الدوال: تكون الدالة د تزايدية في الفترة  $| ^{\dagger} |$ ، ب  $| ^{\dagger} |$  كان لكل س، س،  $| ^{\dagger} |$  ب  $| ^{\dagger} |$  ب  $| ^{\dagger} |$  د  $| ^{\dagger} |$  ب  $| ^{\dagger} |$  ب  $| ^{\dagger} |$  ب  $| ^{\dagger} |$  ب  $| ^{\dagger} |$  د  $| ^{\dagger} |$  ب  $| ^{\dagger} |$

وتكون د تناقصية في الفترة أ، ب[إذا كان لكل س، ، س،  $\in$  أ، ب[، س، > س، فإن د(س،) < د(س،) وتكون د ثابتة في الفترة أ، ب[إذا كان لكل س، س،  $\in$  أ، ب[، س، > س، فإن د(س،) = د(س،)

- ١ الدالة الخطية؛ أبسط صورها: د(س) = س ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠،٠)
- ١١ الدالة التربيعية: أبسط صورها د(س) = س٢، نقطة رأس المنحني هي (٠٠٠)، معادلة محور التماثل س =٠
  - ١٢ الدالة التكعيبية: أبسط صورها د(س) = س، نقطة تماثل منحنيها هي (٠٠٠)
    - ١٣ دالة المقياس: (القيمة المطلقة)

أبسط صورة لدالة المقياس هي د(س) = 
$$|m|$$
، وتعرف على النحو التالى: د(س) =  $\{-m, m > \cdot \}$  و يمثلها شعاعان يبدأن من النقطة  $(\cdot, \cdot)$  ميل أحدهما = ١ وميل الآخر = -١ و يكون:

 $|m| \geqslant 4$ , |-m| = |m|,  $\sqrt{m^{7}} = |m|$ 

- ا الدالة الكسرية: أبسط صورها هي د $(w) = \frac{1}{w}$ ، نقطة تماثل منحنيها هي  $(\cdot \cdot \cdot)$ 
  - التحويلات الهندسية للدالة د، حيث ص = د(س) ، أ > ٠ تحدد بالآتي:
- إذا كانت = c(m) + 1 فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه الموجب لمحور الصادات بمقدار أ
- ◄ إذا كانت ص = د (س) أ فإنها تمثل بإزاحة منحني د في الاتجاه السالب لمحور الصادات بمقدار أ
- ◄ إذا كانت ص = د(س + أ) فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه السالب لمحور السينات بمقدار أ
- ◄ اذا كانت ص = د (س أ) فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه الموجب لمحور السينات بمقدار أ
  - ◄ اذا كانت ص = د (س) فإنها تمثل بانعكاس منحنى د في محور السينات.
  - اذا كانت m=1 د (س) فإنها تمثل بتمدد رأسي لمنحنى د إذا كان 1>0 و إنكماش رأسي اذا كان 1>0 اذا كان 1>1

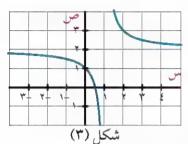
# ١٦ حواص مقياس العدد:

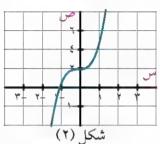
- - ح افذا كان إس ا ﴿ أ ، أ > ﴿ فإن: -أ ﴿ س ﴿ أ
  - د ] إذا كان إس | ≥ أ ، أ > ٠ فإن: س ≥ أأو س ﴿ أ

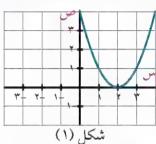


# اختبار تراكمت

أجريت بعض التحويلات الهندسية للدوال د ، ر ، ع حيث د(س) = س ، ر (س) = س ، ع(س) =  $\frac{1}{2}$  فكانت  $\frac{1}{2}$ كما في الأشكال الآتية على الترتيب أكمل ما يأتي:







- أ قاعدة الدالة في شكل (١) هي.... 🌵 قاعدة الدالة في شكل (٢) هي.
- ج. قاعدة الدالة في شكل (٣) هي..... الدالة ليست أحادية كما في شكل...
- ه) مدى الدالة في شكل (١) هو ...... و مدى الدالة هو ع كما في شكل.....
- في نقطة تماثل الدالة في شكل (٣) هي....... (٣ معادلة محور تماثل الدالة في شكل (١) هي..
  - أوجد مجال كل من الدوال المعرفة كما يلي:

$$\frac{\pi}{(m)} = \frac{\pi}{m^2 - 4m - 1} = \sqrt{m} = \sqrt{m} + 7$$

- إذا كانت د(س) =  $\frac{1}{m}$ ، س  $\neq \cdot$  ، ر(س) = ٢س فأوجد كلَّا من:
- ٤ ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = إس ٣ | + ١، ومن الرسم ابحث اطراد الدالة، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٤
  - ٥ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات والمتباينات الآتية:

$$+ = m - Y - |m|$$
  $+ |m| + |m|$   $+ |m| + |m|$ 

- (۱) أثبت أن الدالة د حيث د(س) =  $\frac{|m|+1}{|m|}$  زوجية، وارسم منحنى د، ثم أوجد بيانيًّا وجبريًّا مجموعة حل المعادلة د(س) = ٢س - ٢، وتحقق من صحة الحل.
- الربط بالميكانيكا: أُطلق صاروخ إلى أعلى بسرعة ٩٨ متر/ث من على سطح الأرض، فإذا كانت العلاقة بين ارتفاعه عن سطح الأرض ف بالمتر، والزمن ن بالثانية تعطى بالعلاقة ف = ٩٨ ن - ٢, ٤ ن م بيِّن أن هذه الدالة ليست أحادية، ثم أوجد
  - ارتفاع الصاروخ عن سطح الأرض بعد ثانيتين من لحظة انطلاقه.
  - ب الزمن الذي يستغرقه الصاروخ حتى يكون على ارتفاع ٤٠٠،٤ مترًا من سطح الأرض.

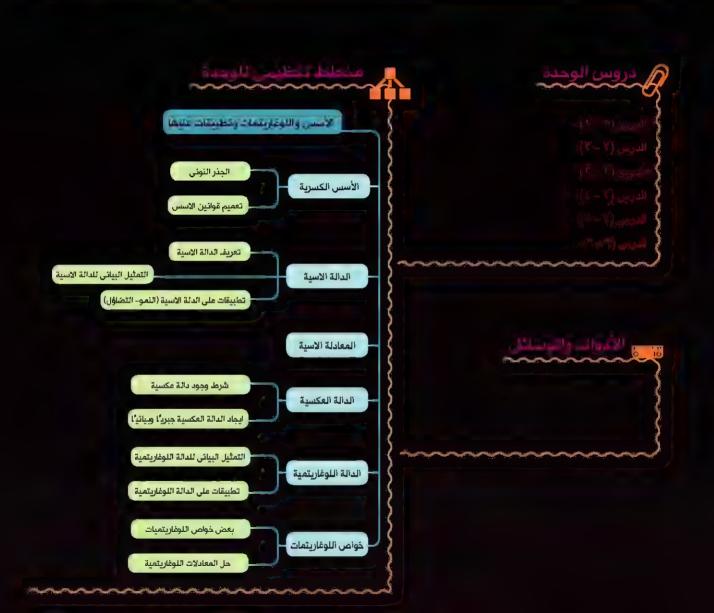
الوحدة **الثانية** 

# الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

Exponents, Logarithms and their Applications







# الأسس الكسرية

# 1 - 7

# Rational Exponents

#### سوف تتعلم

◄ تعميم قوانين الأسس.

الجذر النوتي.

◄ قوائين الأسس الكسرية.

# نمهید 🔡 تمهید

سبق أن درست الجذور التربيعية لعدد حقيقي غير سالب وتعرفت على بعض خواص الجذور التربيعية والجذور التكعيبية ، ودرست الأسس الصحيحة وتعرفت على بعض خواصها وسوف نتعرف في هذا الدرس على الأسس الكسرية.



#### الأسس الصحيحة:

# 👣 المصطلحات الأساسية

The nth Power منافق التوثية المقوة التوثية

Base الأساس

الأس Exponent الأس

ا منار ٹوٹی n<sup>th</sup> Roat ا

♦ أس كسرى Rational Exponent

الأدوات المستخدمة

◄ آلة حاسبة علمية.

◄ برامج رسومية.

# لكل أ ∈ ع ولكل به ∈ صـ \* فإن:

 $1^{\circ} = 1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1$  (حيث العامل أمكرر نه من المرات) و يسمى ( $1^{\circ}$ ) بالقوة النونية للعدد أ، حيث يسمى العدد أ بالأساس، والعدد نه بالأس ونقول أمر فوع للأس نه.

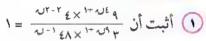
# خواص الأسس الصحيحة:

إذا كان لكل م، به ∈صم، أ، ب ∈ ع - {٠} فإن:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

~ (¹¹) <

# مثال 🥏



# 🔷 الحل

$$\frac{(q^{2})^{3}}{(1 + 1)^{3}} = \frac{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}}{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}} = \frac{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}}{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}} = \frac{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}}{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}} = \frac{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}}{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}} = \frac{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}}{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}} = \frac{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}}{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}} = \frac{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}}{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}} = \frac{(q^{2})^{4} \times (q^{2})^{4}}{(q^{2})^{4}} = \frac{(q^{2})^{4}}{(q^{2})^{4}} = \frac{(q^{2})^{4}}{(q^{2}$$

# 🚹 حاول أن تحل

ر أوجد في أبسط صورة المقدار: 
$$(r)^{-1} \times (r)^{-1}$$

# مثال

$$\frac{\circ}{9} = \frac{{}^{2} + {}^{4}(70) \times {}^{4} - {}^{2}(10) \times 170}{{}^{6} + {}^{2}(0) \times {}^{2}(0)} : 0$$

#### 🔷 الحل

$$\frac{\frac{\sigma^{+} f(r) \times r^{-} \circ (o \times r) \times r^{0}}{r^{+} \circ (o) \times r^{0} \circ (o \times r)}}{r^{+} \circ (o) \times r^{0} \circ (o \times r)}}{\frac{\sigma^{+} \circ (o) \times r^{-} \circ (o) \times r^{-} \circ (o)}{r^{+} \circ (o) \times r^{0} \circ (o \times r)}} = \frac{\sigma^{+} \circ r^{+} \circ (o \times r^{0} \circ (o \times r^{0$$

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{\sigma}{r_{\psi}} = \frac{r}{r} \times (\sigma) = \frac{\sigma}{r}$$
 (الطرف الأيسر)

#### 🛂 هاول أن تحل

$$\frac{11}{100} = \frac{1 \cdot 0^{4} \times 2 \cdot 0^{4} \times 2 \cdot 0^{4}}{1 \cdot 0^{4} \times 1 \cdot 0^{4} \times 1} = \frac{11}{100}$$

#### تفكير ناقد:

( أ إذا كانت أ∈ع ، به عددًا صحيحًا فرديًّا، فحدد العبارات الصحيحة فيما يأتى:

$$\cdot >$$
  $\cdot >$   $\cdot <$   $\cdot <$ 

# الجدر النوني:

# تعلمت أن:

المعادلة m' = 9 لها جذران حقیقیان فقط هما  $\sqrt{P} = 7$  أو  $-\sqrt{P} = -7$ 

$$q = {}^{\Upsilon}(T-)$$
 ،  $q = {}^{\Upsilon}T$ 

كذلك المعادلة س"= ٨ لها جذر حقيقي وحيد

هو 🔻 🖛 = ٢ (باقي جذور المعادلة أعداد مركبة غير حقيقية)

$$\Lambda = \Upsilon(\Upsilon)$$
  $= \Lambda = \Gamma(\Upsilon)$ 

# وعلى وجه العموم:

المعادلة س - = 1 حيث  $1 \in 9$  ، - = 0 لها - = 1 لها من الجذور، ونناقش فيما يلى عدة حالات:

إذا كان ن عددًا زوجيًّا ، أ > •

فإن المعادلة س = أ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية ويرمز للجذرين الحقيقيين بالرمزين  $\sqrt[8]{1}$  ،  $-\sqrt[8]{1}$  ، ويسمى الجذر النونى الذي له نفس إشارة أ بالجذر النونى الأساسى للعدد أ.

#### دار النصر للطباعة (هدلاين)

لأي عدد حقيقي يكون

11 = T1

مثل: المعادلة  $m^2 = 17$  لها جذران حقيقيان هما  $\sqrt[4]{17} = 7 - \sqrt[4]{17} = -7$  (وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية).

 $Y = {}^{\xi}(Y)$  ،  $Y = {}^{\xi}(Y)$ 

# ۲) إذا كان ن عددًا زوجيًّا ، أ < ٠</li>

فإن المعادلة  $m^{0} = 1$  ليس لها جذور حقيقية (جذورها أعداد مركبة غير حقيقية). مثل: المعادلة  $m^{0} = -1$  ليس لها جذور حقيقية (جذورها أعداد مركبة غير حقيقية).

# ٣) إذا كان له عددًا فرديًّا ، أ ∈ ع- [٠]

فإن المعادلة  $m^0 = 1$  لها جذر حقيقي وحيد هو  $\sqrt[4]{1}$  (باقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية) مثل: المعادلة  $m^0 = -77$  لها جذر حقيقى وحيد هو  $\sqrt[4]{-77} = -7$  (لاحظ أن  $(-7)^0 = -77$ )

# ٤) إذا كان ب ∈صب، أ = صفر

فإن المعادلة س = صفر لها حل حقيقى وحيد هو س = • (المعادلة لها  $\upsilon$  من الجذور المكررة وكل منها يساوى صفر عندما  $\upsilon$  > ١).

### 🚰 حاول أن تحل

💎 أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

تفكير نلقد وضح بمثال عددي الفرق بين الجذر السادس للعدد أوبين ١١ ٢



# Rational Exponents الأسس الكسرية

تعلمت أن الجذر التربيعي للعدد الحقيقي غير السالب أهو العدد الذي مربعه يساوي أ وبفرض أ<sup>أ</sup> تمثل الجذر التربيعي الأساسي للعدد أ

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{Y}$$
 ...  $1 = \frac{1}{Y} = \frac{1}{Y}$  ...  $1 = \frac{1}{Y} = \frac{1}{Y}$  ...  $1 = \frac{1}{Y} = \frac{1}{Y}$ 

أى أن المنه المجذر التربيعي الأساسي للعدد أ أي أن ١١ = الم

بالمثل  $\frac{1}{1}$  هي الجذر التكعيبي الأساسي للعدد أ أي أن  $\frac{1}{1}$  =  $\frac{1}{1}$  وعمومًا  $\frac{1}{1}$ 

الله عدد حقیقی 
$$1 > 0$$
  $0 > 0 = 0$  الله عدد حقیقی  $1 > 0 > 0 = 0$  الله عدد حقیقی  $1 > 0 > 0$  الله عدد صحیح فردی أکبر من  $1 > 0$  عدد صحیح فردی أکبر من  $1 > 0$ 

Y)  $|\tilde{V}| = (\tilde{V}_{1})^{2} = \tilde{V}_{1}$  حیث  $|\tilde{V}| =$ 

# تعميم قوانين الأسس

# قوانين الأسس الكسرية تخضع لنفس قوانين الأسس الصحيحة

# مثال

# 🔻 أوجد قيمة كل مما يأتي (إن أمكن)

# 🔷 الحل

$$Y = \overline{Y} V = \overline{Y}(Y) - (Y)$$

$$(\Gamma)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\Gamma} = 7$$

$$(VY)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{(VY)^{\frac{1}{2}}} = (\frac{1}{VVY})^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{V})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(VY)^{\frac{1}{2}}}$$

# 🗗 حاول أن تحل

# ٤ أوجد قيمة كل مما يأتي (إن امكن):

### فسر لماذا؟

# Properties of nth Roots

# خواص الجذور النونية

# مثال

# (٤) أوجد في أبسط صورة كل من: (1 - ١٦ ١٨ - ١٠ بـ ١٠ الم

# الحل 🕥

# ﴿ إِنَّ الْمُؤْكِنُ لِهُ زُوجِي ا إذا كان به فردى

# حاول أن تجل

- ٥ أوجد في أبسط صورة كل من:
- 1/ (w+7m) 1/ (w+7m) 1/ (m+7m) 1/ (m+7m) 1/ (m+7m)

# مثال 👩

(٥) أوجد في أبسط صورة كل من

+ (1£V) × + + (+)

 $\frac{1}{\frac{1}{2}(r_{5})} \times \frac{r_{5}}{r_{5}} (17) \times \frac{1}{r_{5}} (1\Lambda)$ 

#### 👝 الحل

- ل المقدار =  $(7 \times 7^7)^{\frac{1}{7}} \times (7 \times 7^7)^{\frac{1}{7}} \times (7 \times 7^7)^{\frac{1}{7}} = 7^{\frac{1}{7}} \times 7^{\frac{1}{7}}$ 
  - $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1$  $1 = 1 \times 1 = \sqrt{1 \times 1} = \sqrt{1 \times 1}$

# 🚼 حاول أن تحل

- ٦ أثبت أن:
- $\frac{1}{V} = \frac{1}{1 + 2\pi^{2}(\pm) \times \frac{1}{V}} \frac{2\pi^{2}(\Psi \pm \Psi)}{(147)}$  $\mathsf{To} = \frac{\frac{1}{1} \cdot \mathsf{I} \cdot \mathsf{X} \times \frac{\mathsf{T}_{\Sigma}}{\mathsf{V}} \times \mathsf{ITO}}{\frac{\mathsf{T}_{\Sigma}}{\mathsf{I}} \cdot \mathsf{I} \times \mathsf{X} \times \frac{\mathsf{O}}{\mathsf{A}} \times \frac{\mathsf{O}}{\mathsf{A}} \times \frac{\mathsf{O}}{\mathsf{A}}}$

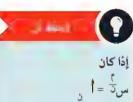
# حل المعادلات الآسية في ع

# مثال

- 🕤 أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:
- $\Delta 1 = \frac{1}{7} (\Upsilon + \Gamma_{1} + \Gamma_{2})$
- 17A = \frac{\frac{1}{7}}{1} \m (1)

# 🕜 الحل

- ۱۲۸ = ۲ س (۱
- $\nabla^{\vee}(Y) = (Y^{\vee})^{\frac{\vee}{V}}$  $\nabla (1 \wedge \Lambda) = \nabla \Lambda$
- س = ۲۲ = ځ  $\{\xi_{i}\}=\sum_{i}\sigma_{i}$ .
  - $\Lambda 1 = \frac{1}{T} (T + m T) \frac{1}{T}$
- $(7 + 7)^{\frac{1}{7}} = (7^{\frac{1}{7}})^{\frac{1}{7}}$  برفع الطرفين للقوة ٣
  - ( ۲ س + ۳) ع = ۳۲



 $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$   $\frac{1}{\sqrt{c}}$   $\frac{1}{\sqrt{c}}$   $\frac{1}{\sqrt{c}}$ حیث م عدد فردی إذا كان سر<del>ا</del>د = أ قَوْن س = ± أ حیث م عدد زوجی م، ن ليس بينهما عامل مشترك

$$^{7}$$
 س +  $^{7}$  +  $^{1}$ 

# 🚰 حاول أن تحل

👽 أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

- (س + ۲۲ = ۴ (۱ + س )
- ۸۱ = <sup>ل</sup> س ا

# تمـــاريــن ۲ – ۱

- متى تكون العلاقة  $\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1} \times \sqrt[4]{1}$  صحيحة لجميع قيم أ، ب الحقيقية.
  - (٣) أكمل ما يأتي:

- $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$  في أبسط صورة تساوى ......
- آ) (٨) <sup>†</sup> في أبسط صورة تساوى .....
- $(\frac{17}{170})^{-\frac{7}{4}}$  في أبسط صورة تساوى ......  $(\frac{7}{170})^{-1}$  في أبسط صورة تساوى ....

  - ه) (ه' ۲°) الله في أبسط صورة تساوي.
  - ٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:
  - أ) إذا كان ٥س = ٢ فإن ٢٥ ساوى .....
    - ب (۲+ ۲°) تساوی .....
  - ع) إذا كان س<sup>ب</sup> = ٦٤ فإن س تساوى .....
    - د) أي مما يأتي لا يساوي(السس)

(1. 075, 3, 7)  $(\frac{1}{Y} \cdot \frac{1}{Y} \cdot Y \cdot Y - \epsilon Y)$ (Y c & c 17 c 01Y) (<sup>2</sup>(<sup>1</sup>/<sub>w</sub>); <sup>1</sup>/<sub>w</sub>) , <sup>1</sup>/<sub>w</sub> , <sup>2</sup>( w ))

# الوحدة الثانية: الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

- - ه اكتشف الخطأ:

  - ب) إذا كان س<sup>ع</sup> = ٨١ فإن س = <sup>١</sup>٨١٨ .. س= ٣
- البيط بالهندسة: إذا كان طول نصف قطر كرة مع يعطى بدلالة الحجم ع من العلاقة مع =  $\frac{7}{\pi \epsilon}$ . أوجد الزيادة في طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من  $\frac{77}{\pi}$  إلى  $\pi$ 7 وحدة مكعبة.
  - أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$\Delta 1 = \frac{1}{\pi v} = \frac{1}{v}$$

$$4 = 7 \times 10^{-1} = 77$$

- ♦ إذا كان س<sup>‡</sup> = ٣ص<sup>‡</sup> = ٢٧ فما قيمة س + ص
- ٩ تفكير ليداعمن اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

# نشاط 🚷

استخدم الآلة الحاسبة في تبسيط إجراء العمليات الآتية (مقربًا الناتج إلى رقمين عشريين)

- 1) \*\*\frac{\lambda\_3 \times \tau^{-\sigma}}{\gamma^{-\sigma}}
- $\frac{\theta}{T}(\star,\star 1) + \frac{T}{T}(TT)$



# الدالة الأسية وتطبيقاتها

# Exponential Function and it Applications

# نشاط 🚻

تتكاثر خلايا البكتريا بطريقة الانقسام المباشر إلى خليتين في كل مرة خلال فترة زمنية محدودة ثم تنقسم الخليتين إلى أربع خلايا، ثم تنقسم الأربع إلى ثمانٍ، ويستمر انقسام الخلايا بنفس الطريقة خلال نفس الفترات الزمنية وفي نفس الظروف.

يبين الجدول التالى زمن الانقسام لخلية البكتريا بالساعة وعدد الخلايا الناتجة.



- ١) أكمل الجدول السابق.
- ٢) عبّر عن عدد خلايا كل انقسام بالصورة الأسية للأساس ٢.
  - ٣) ماذا تتوقع أن تكون عدد الخلايا بعد مرور ٨ ساعات.
- ٤) عبِّر بالصورة الأسية عن عدد خلايا البكتريا بالانقسام بعد مرور س ساعة.



# الدالة الأسية Exponential Function

تسمى الدالة د حيث د(س) = أس حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١ ، س ∈ ع بالدالة الأسبة.

### مثال:

$$c(m) = T^m$$
 clf أسية أساسها (۲) وأسها (س).

$$c(m) = 0$$
  $m^{-1}$  clts أسية أساسها (٥) وأسها  $(m+1)$ .

$$c(m) = (\frac{1}{\pi})^{7m}$$
 دالة أسية أساسها  $(\frac{1}{\pi})$  وأسها  $(7m)$ 

# 🚹 حاول أن تحل

- بين أى الدوال الآتية دالة أسية.
  - $(m) = m^3$
  - ج د (س) = س + ۱
  - $a_{i} c(m) = \left(\frac{7}{2}\right)^{m-1}$

- سوف تتعلم ♦ الدالة الأسية.
- ◄ تشير الدوال الأسية بياتيًا.
  - خواص الدالة الأسية.

# المصطلحات الأساسية

- دالة أسية. Expontential Function
- ♦ نهو أسي، Exponential Growth
- ♦ تضاؤل أسى . Exponential Decay

# الأبوات المستخدمة

- ◄ آلة حاسبة علمية.
- ◄ پرامج رسومية.

# تذكران 💡

الدالة الجبرية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأساس أما الأس فهو عدد حقيقي.

الدالة الأسية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأس أما الأساس فهو عدد حقيقي موجب لايساوي الواحد.

(ب د(س)=(۲)س

۱- ۳س = (س) ع (ع)

و د (س) = (۲)س

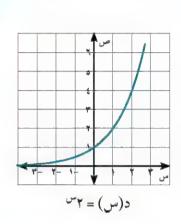
Graphical Representation of Exponential Function

### التمثيل البياني للدالة الأسية

مثل بیانیًّا کل من الدالتین د
$$(\mathbf{w}) = \mathbf{r}^{\mathbf{w}}$$
 ،  $\sim (\mathbf{w}) = \mathbf{r}^{\mathbf{w}}$ 

		_			
	ų	ص			-
	4				
	,				
	/		-		
Y- Y- 1	,	,		1	س
٠١, ٠		,			
$\omega(\frac{1}{2})$	) =	(J	ر'	-	

٠(س)	( Jay )	
۸	× A	٣-
٤	\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\	7-
٢	<del>'</del> <del>'</del>	1-
1	*	صفر
<u>'</u>	۲	1
\ \ \ \ \ \	ź	۲
A A	٨	٣



خواص الدالة النسة د(س) = أسحيث أ> ٠ ٠ أ ≠ ١

مجال الدالة الأسية د(س) = أس هو ع ومداها] 0.0

(۲) إذا كان l > l فإن الدالة تزايدية على مجالها وتسمى دالة نمو أسى معامله l أما إذا كان l > l > l فإن الدالة تناقصية على مجالها وتسمى دالة تضاؤل أسى معامله l.

 $^{\prime\prime}$  منحنى الدالة د(س) =  $^{\prime\prime}$  يمر دائمًا بالنقطة (۱۰۰) لجميع قيم  $^{\prime}$  > ،  $^{\prime}$  الج

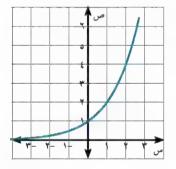
٤) د(س) = أس هي دالة احادية (One - to - One)

٦ ا ا ص حيث ا >١ محيث ا

ا<sup>س</sup> → عندما س → ∞ حیث ۱ > ۰ ا

# 📑 حاول أن تحل

- الشكل المقابل يمثل الدالة د المعرفة على ع ، حيث د $(m) = (7)^m$ . ارسم على نفس الشكل منحنى الدالة ر المعرفة على ع ، حيث  $\sim (m) = (\frac{1}{7})^m$ ، ثم أوجد مجال ومدى كل من الدالتين، ثم بيَّن أى منهما تزايدية أو تناقصية مع ذكر السبب.
- تفکیر نلقد: إذا کانت د(س) = أس حیث > ا رتب کل مما یأتی ترتیبًا تصاعدیًا د(۷) ، د(۲-) ، د( $\sqrt[4]{\circ}$ ) ، د(۰).



# مثال 👩

اذا کانت د (س) =  $^{m}$  فأکمل ما يأتى:

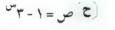
🔷 الحل

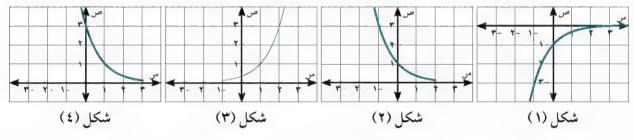
 $\P = {}^{\Upsilon} = (\Upsilon) \circ \P^{\Upsilon} = P$ 

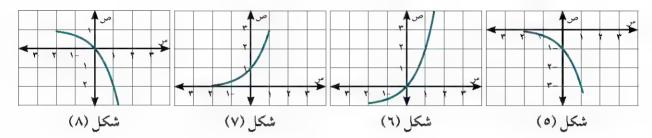
# 🚹 حاول أن تحل

٤ في كل من التمارين الآتية اكتب قاعدة الدالة تحت الرسم البياني المناسب حيث:









# تطبيقات تؤول إلى معادلات على الصورة إس = ب

# النمو والتضاؤل: Growth and Decay

يوجد العديد من الظواهر في الحياة اليومية يمكن أن تنمذج كدوال تصف هذه الظواهر من حيث النمو والتضاؤل أو (الأضمحلال) مع مرور الوقت، ومن أمثلة هذه الظواهر دراسة السكان والبكتريا والفير وسات، والمواد المشعة والكهرباء ودرجات الحرارة.

وفي مجال الجبر هناك دالتان يمكن استخدامهما بسهولة للتعبير عن مفهوم النمو ومفهوم التضاؤل (الاضمحلال) هما دالة النمو الأسى ودالة التضاؤل الأسى.

# أولاً: النَّمو الأسي: Exponential growth

يمكن استخدام الدالة د، حيث د $(v) = 1 (1 + \infty)^{v}$  لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية، حيث به هي الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، م النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة.

(ناقش معلمك لاستنتاج العلاقة السابقة).

الربح المركب: عند حساب جـ جملة مبلغ أ مستثمر في أحد البنوك التي تعطي ربح سنوي مركب مر (نسبة مئوية) لعدد به من السنوات بفترات تقسيم العائد السنوي إلى س فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة:

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{m}\right)^{1/2}$$

# مثال 🧒

▼ أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه في أحد البنوك التي تعطي فائدة سنو ية مركبة قدرها ٨٪، أوجد جملة المبلغ بعد مرور
 عشرة أعوام في كل من الحالات الآتية:

ل العائد السنوي العائد الربع سنوي

👩 الحل

باستخدام العلاقة ج = أ (١ +  $\frac{\sqrt{}}{m}$ ) باستخدام العلاقة ج

$$4 \sin \frac{1}{\xi} + 1 \cos \frac{1}{\xi} +$$

# 🖯 حاول أن تحل

٥ يتكاثر النحل في أحد الخلايا، فيزداد بمعدل ٢٥٪ كل أسبوع، فإذا كان عدد النحل في البداية ٦٠ نحلة. اكتب دالة أسية تمثل عدد النحل بعد به أسبوع، ثم قدر عدد النحل بعد ٦ أسابيع.

فانيًا: التضاؤل الأسي: Exponential decay

يمكن استخدام الدالة دحيث د(ى) = أ (١ -  $\sim$ ) لتمثيل التضاؤل الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية، حيث  $\sim$  هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية،  $\sim$  النسبة المئوية للتضاؤل فى الفترة الزمنية الواحدة.

# مثال

البيط بالتحارة: اشترى كريم سيارة جديدة بمبلغ ١٢٠٠٠٠ جنيه، فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ١٢٪ كل سنة.

أولًا: اكتب دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد ب سنة من شرائها.

ثانيًا: احسب لأقرب جنيه سعر السيارة بعد مرور ٦ سنوات من شرائها.

### 🔷 الحل

أ = ۱۲۰۰۰۰ ،  $\sim = \frac{17}{100} = 17$  ، الفترة الزمنية  $\omega = 7$  سنوات أولًا: دالة التضاؤل الأسى هي: د $(v) = \frac{1}{2}(1-x)^{0}$  وبالتعويض عن قيم أ ، x فإن: د (۱۲ - ۱۲ - ۱۲ ) ۱۲۰۰۰۰ = (س) د أى أن: د(ب) = ١٢٠٠٠٠ (٨٨) ثانيًا: بالتعويض عن ن = ٦ في دالة النمو الأسي:

 $\circ \circ \lor \lor \land$ ,  $\xi \circ \cdot \xi \circ = (\circ, \land \land) \lor \lor \cdot \cdot \cdot = (\circ) \circ$ 

سعر السيارة المتوقع بعد مرور ٦ سنوات يقدر بمبلغ ٥٥٧٢٨ جنيهًا

### 🚰 حاول أن تحل

- ٦ البيط بالطب يتناول أحد المرضى ٤٠ مليجرامًا من عقار طبي، ويمكن لجسم المريض أن يتخلص من ١٠٪ من هذا العقار تقريبًا في الساعة.
  - اكتب معادلة أسية تمثل كمية العقار المتبقية في جسم هذا المريض بعد تناول العقار.
    - ٢) قدر كمية العقار المتبقية في جسم المريض بعد ٤ ساعات من تناول العقار.



# (١) أكمل ما يأتي:

ب الدالة الاسية رحيث مرس) = ٣٠٠٠ أساسها هو .....

hoالدالة و حيث و  $ho(m) = (\frac{-1}{V})^{m+1}$  ليست دالة أسية لأن \_\_\_\_\_

إحداثيا نقطة تقاطع الدالة الأسية د(س) = أسمع المستقيم س = ٠ هي النقطة ( ...... ، ......)

(س) =  $m^{\omega}$ ، معادلة محور التماثل لمنحني الدالتين د، m حيث: دm =  $m^{\omega}$ ، رm

اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات الآتية:

أ تكون الدالة الأسية التي أساسها أتزايدية إذا كانت

(ب) ۱<۱ ۱>١>١<) ·<!(1) 1=1(3)

ب) تكون الدالة الأسية التي أساسها أ تناقصية إذا كانت:

٠>١(ت) ٠>١>١-(٥) ١>١> (ج) ·<!(1)

ج) الدالة الأسية د حيث د(س) = أس ، أ > ١ يقترب خطها البياني من:

(ب) محور السينات (الاتجاه السالب) ( أ) محور السينات (الاتجاه الموجب)

(د) محور الصادات (الاتجاه السالب) (ج) محور الصادات (الاتجاه الموجب)

د ) في الدالة الأسية د حيث د(س) =  $|^{10}$  ،  $|^{1}$  ا تكون د(س) > ا عندما:

الوحدة الثانية: الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

$$(1) \quad m \in \mathcal{G} \qquad (1) \quad m \in \mathcal{G}^{+} \qquad (2) \quad m \in \mathcal{G}^{-}$$

ه في الدالة الأسية 
$$\sim$$
 حيث  $\sim$  (س) = أ $^{m}$  ، (۰ < أ < ۱) تكون ۰ < أ $^{m}$  < ۱ عندما  $m \in$  (أ) ] - ،  $\infty$  [ (  $\sim$  ) ] -  $\infty$  ، ۱] (  $\sim$  )  $\infty$  [ (1) ] -  $\infty$  , ۱] (  $\sim$  )  $\infty$  [ (1) ] -  $\infty$  , ۱]

🔻 بين أي من الدوال الآتية دالة أسية، ثم اكتب أسها وأساسها:

$$\frac{1}{1-m} = (m) = \frac{7}{m} = (m) = (m) = \frac{7}{m} = (m) = (m)$$

$$(V-) = (w) = 9$$

٤ مثّل الدالة د في كل مما يأتي بيانيًّا، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها، وبيِّن أي منها تزايدية وأي منها تناقصية:

$$1 + \frac{1}{2} = (w) = 7^{w}$$

$$(w) = (\frac{1}{4})^{w_0 + \frac{1}{4}} - 1$$

$$(w) = (\frac{1}{4})^{w_0 + \frac{1}{4}} - 1$$

$$(v) = (w) = (\frac{1}{4})^{w_0 + \frac{1}{4}} - 1$$

( الربط باللحظية أودع زياد مبلغ ٨٠٠٠٠ جنيه في أحد البنوك بفائدة سنوية ١٠,٥٪، كم يصبح جملة رصيده بالجنيه بعد ١٠ سنوات، علمًا بأن جملة الرصيد تعطى بالعلاقة:

 $-= -(1 + 1)^{U}$  حيث م المبلغ، من النسبة المتوية للفائدة ، ك عدد السنوات

- الربط باللتصاللت: يتناقص عدد الهواتف الأرضية في إحدى المدن نتيجة انتشار الهواتف المحمولة بمعدل ١٠٠، فإذا كان عدد الهواتف في إحدى السنوات ٥٤٠٠٠ هاتف، فاكتب دالة أسية تمثل عدد هذه الهواتف بعد مرور به سنة، ثم قدِّر عدد الهواتف بعد مرور ٣ سنوات.
- البيط باللستثمان بلغ عدد الأبقار في أحد مزارع الماشية ٨٠ بقرة، فإذا كان معدل التكاثر لهذه الأبقار يبلغ البيط باللستثمان بلغ عدد الأبقار في المزرعة بعد ٤ سنوات.
- ♦ البيط بالسكان: بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات في جمهورية مصر العربية ٢,٦ مليون نسمة بمتوسط
  زيادة ٤ ٪ سنويًّا.
   أ يَّادٍ كَا رَبِيادة ٤ ٪ سنويًّا.

أولًا: اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلي بعد مه سنة.

ثانيًا: قدِّر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من وقت التعداد.

- (٩) للبيط بالبياضة: يتناقص عدد المشجعين لإحدى فرق كرة القدم بمعدل ٤٪ نتيجة خسارتها في إحدى الدورات الرياضية، فإذا كان عدد المشجعين في أول مباراة ٣٦٤٠٠ فاكتب دالة أسية تمثل عدد الحضور (ص) في المبارة (ت)، ثم قدر عدد المشجعين في المبارة العاشرة.
- تفکیر ایداعهی: إذا کان د (س) =  $7^m$  فأثبت أن المقدار  $\frac{1}{c(m)+1} + \frac{1}{c(-m)+1}$  له قیمة ثابتة مهما کانت قیمة س

سوف تتعلم

 ◄ , المعادلة الأسية جبريًا. ◄ مر المعادلة الأسية بيانيًا.

المصطلحات الأساسية

الحر البياق Graphical Solution

Exponential Equation

معادلة أسبة

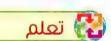
# المعادلات الأسبة

# Exponential Equations

# استكشف 🔂

# من الجدول الآتي بين متى تتساوى ٢<sup>س</sup> مع ٢س:





### Exponential Equation

المعادلة الأسية

إذا تضمنت المعادلة متغيرًا في الأس، فإنها تسمى معادلة أسية مثل (٣٣ = ٢٧) فنجد:

أولًا: إذا كان أ= ألم حيث أ (٠،١٠٦) فإن م= به،

# مثال 🚮

أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية: 
$$\frac{1}{7} M^{-1} = \frac{1}{7} M^{-1}$$

### 🕠 الحل

$$^{\text{M-}}\text{M} = ^{1+\text{OM}}\text{M} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{1}{\text{FV}} = ^{1+\text{OM}}\text{M} \cdot \frac{1}{\text{M}}$$

$$^{Y-\omega^{-1}}(^{Y}Y)=^{Y-\omega^{-1}}(^{\frac{Y}{Y}}Y) ...$$

$$7 - m^{\frac{q}{\gamma}} - m - \frac{\frac{q}{\gamma}}{\gamma} = 7m - 7$$

# الأدوات المستخدمة

- ♦ حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.
  - ألة حاسبة علمية.

# 🚹 حاول أن تحل

أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$\frac{1}{T} = \frac{\sigma(\gamma_0 + \gamma_0)}{\sigma(\gamma_0 + \gamma_0)}$$

ثانيًا: إذا كان أ = ب محيث أ، ب ﴿ ١٠،١٠-١}، فإن

إما: م = صفر

أو: أ=ب عندمام عدد فردي ، أ= ±ب عندمام عدد زوجي.

.. مجموعة الحل = {-\$}

۰۰. ۲<del>۴ (س-۲) = ۲ (س-۲) د</del> .۰.

.. ۳س - ۳س = ۹ - ۱۲ ·

.٠. مجموعة الحل = {١}

بالضرب في ٢

 $^{\gamma}$ - $\omega(^{\gamma}\gamma) = ^{\gamma}$ - $\omega(^{\frac{1}{\gamma}}\gamma \times \gamma)$ ...

# مثال

- أوجد في خ مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

### 🕠 الحل

.. مجموعة الحل = {٣}

### 🛂 حاول أن تحل

٧ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات

تفكي نلقد: أوجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة س سن = ٤ سن

# مثال 🚮

(س) = ۳ افتا کانت داس

(ب إذا كان د(س + ۱) - د(س - ۱) = ۷۲ أوجد قيمة س

# 👣 الحل

= ٣ ٢<sup>س</sup> = د(٢س) = الطرف الأيسر

$$= c(m+7) \times c(m-7) = m^{+7} \times m^{-7}$$

$$= m^{+7+m-7}$$

$$= m^{+7+m-7}$$

VY = 1-0 Y - 1+ 0 Y ...

$$VY = \frac{1-\omega}{2} Y - \frac{1+\omega}{2} Y$$
 ...

# 🚰 حاول أن تحل

- (m) =  $\lambda^{m}$  |  $\lambda$  |
- $\Lambda = (1 m^{*}) + c_{*}(7m 1) = \Lambda$

۱۲۸ = 
$$\frac{c_1(7+w+1)+c_2(7+w+7)}{c_1(7+w+1)+c_2(7+w+7)}$$

# مثال

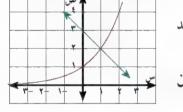
- إذا كانت د(س) =  $7^m$ أوجد س التي تحقق المعادلة: د(س) + د(٥ - س) = 11:
  - 🚺 الحل

- 🚹 حاول أن تحل
- $\frac{1}{\epsilon} = \frac{(1-m)s}{(1+m)} + \frac{(1+m)s}{(m-1)} + \frac{s(m-1)}{s(m-1)}$  في المثال السابق أثبت أن:

حل المعادلات الأسية بيانيًا Solving Exponential Equastions Graphically

# نشاط 🚷

- $\nabla$  باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم في شكل واحد منحنيي كل من الدالتين در(س) =  $T^m$ ، در(س) =  $T^m$  ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة  $T^m = T^m$ 
  - الحل 🔷



باستخدام برنامج Geogebra نرسم منحنيي الدائتين د،، د،، ومن الرسم نوجد إحداثيات نقطة التقاطع هي (١، ٢) نجد من الرسم أن نقطة تقاطع منحنى الدائتين د،، د، هو (١، ٢) لذلك فإن مجموعة حل المعادلة: 7m = 7 - m هو  $\{1\}$ .

# 🚹 حاول أن تحل

 $oldsymbol{0}$  باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم كلَّا من الدالتين:  $c_1(m) = T^m$  ،  $c_2(m) = m + T$  ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة  $T^m = m + T$ 

# تمارین ۲ – ۳

اختر الإجابة الصحيحة:

1 = 5-00 (7)

177 = 5+m4 - 5+m4 (3)

$$(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = 1$$
 حيث أ > صفر، فإن أ = .....

(٢) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

$$\Lambda \xi = {}^{0} + {}^{$$

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلتين: 

$$0 \cdot = (Y - w) + (Y - w)$$
 إذا كانت د(س -  $Y = (w - w)$  فأوجد قيمة س التي تحقق د

أوجد بيانيًا مستخدمًا أحد برامج الرسوميات مجموعة حل المعادلة:

تفكير ليداعون إذا كان 
$$m^7 = m^4$$
 وكان  $m^{0+4} = m^{0+4}$  فما قيمة  $m^4$ 

ل أوجد مجموع العشرة أعداد الأولى في النمط

ب) أوجد عدد الحدود في النمط ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٣١٠٧٠

عل كُلًا من المعادلات الآتية:

$$Q = \frac{1}{4} V + \frac{1}{4} V +$$

👀 تفكير ابداعي:

أوجد مجموعة حل المعادلة: 

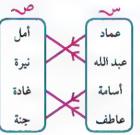
# الدالة العكسية

◄ التمثير البياني للدالة العكسية،

إيجاد الدالة العكسية لدالة بيانيًا

### The Inverse Function

# 🙀 فکر و ناقش



الشكل المقابل يمثل علاقة (أب) بين مجموعة من الآباء سـ = {عماد، عبد الله، أسامة، عاطف} وبناتهم ص = {أمل، نبرة، غادة، جنة} بالاستعانة بالشكل.

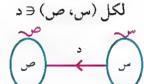
- ١) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "أب" من سر إلى صر هل العلاقة تمثل دالة؟ و إذا كانت دالة هل هي دالة أحادية؟
- ٢) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "إبنة" من صم إلى سم هل العلاقة تمثل دالة؟

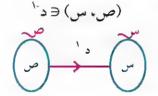


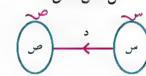
### الدالة العكسية The Inverse Function

إذا كانت الدالة د دالة أحادية (One-to-One) من مجموعة سم إلى مجموعة صم، فإن الدالة د السمى دالة عكسية للدالة دمن صد إلى سد إذا كان:

فإن







# مثال 👩

 إذا كانت د دالة بيانها كالآتى: د = { (١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}. أوجد بيان الدالة العكسية للدالة د ومثلهما في شكل واحد.

# 🔷 الحل

- حيث إن الدالة المعطاة أحادية، فإن لها معكوسًا.
- ٠٠ د (س) = ((١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٢)، (٤، ٨)}
- $\{(\mathfrak{L},\Lambda): (\mathfrak{T},\mathfrak{T}): (\mathfrak{L},\mathfrak{T}): (\mathfrak{L},\mathfrak{T}): (\mathfrak{L},\mathfrak{L}): (\mathfrak{L},\mathfrak{L})\} = (\mathfrak{L},\mathfrak{L})\}$
- نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية دنه متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س
- أي أن د' (س) هي صورة د(س) بالانعكاس في المستقيم ص = س

سوف تتعلم ♦ الدالة العكسية.

وجبريًّا.

**Function** 

المصطلحات الأساسية

♦ دالة عكسية Inverse Function

دالة أحادية

♦ مجال. Domain

One to One Function

ا ملکی Range

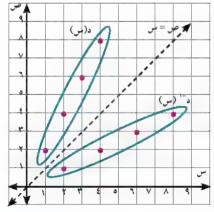
♦ اتمكاس Reflection

### الأبوات المستخدمة

♦ آلة حاسة.

◄ برامج رسومية.

٩ حاسب آلي.



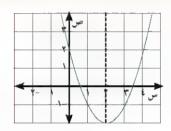
# 🚼 حاول أن تحل

🕦 أوجد بيان الدالة العكسية للدالة التي يمثلها الجدول الآتي:



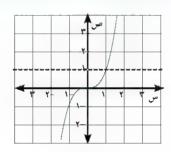
# اختيار الحط الرأسي

إذا قطع أي خط رأسي منحني ما في نقطة واحدة على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة.



### اختبار الخط الأفقي

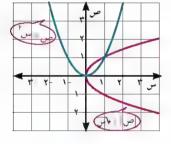
إذا قطع أي خط أفقى منحنى دالة ما في نقطة واحدة، على الأكثر فإن المنحني يمثل دالة أحادية.



# للحظ أين

إذا كانت الدالة ليست أحادية (لا تحقق اختبار الخط الأفقي) فإن معكوسها لا بمثل دالة.

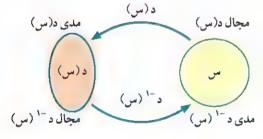
مثل ص = س السب أحادية) معكوسها إص = م س لا يمثل دالة.



# من خواص الدالة العكسية؛

١- يقال أن د(س) ، س(س) دالة عكسية للأخرى إذا كان ( د ∘ مر) (س) = س و (م ∘ د) (س) = س

(m) - مجال الدالة د(m) = مدى الدالة العكسية د مدى الدالة د(س) = مجال الدالة العكسية د (س)



# تفكير ناقد:

ما مجال الدالة د حيث د(س) = س التي يكون فيه للدالة د دالة عكسية، وأوجد هذه الدالة العكسية.

# مثال 👩

- 😯 أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د(س) = ٢س + ١ ومثِّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا في شكل واحد.



لإيجاد الدالة المكسية أولًا نقوم بتبديل المتغيرات، ثم نوجد ص بدلالة س.

# 🔷 الحل

$$1 + \infty = 1$$
 س  $+ \infty$  بتبديل المتغيرات



نالحظ أن الدالة د والدالة العكسية د- المنحناهما متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

# 🚰 حاول أن تحل

# مثال 🚮

# 🕦 الحل

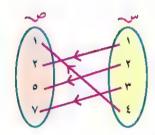
بتربيع الطرفين

### 🚼 حاول أن تحل

$$\frac{1}{1+1} = (m) = \frac{1}{m+1}$$

# تمـــاريـن ۲ – ٤

# (١) أكمل:



$$-$$
 الشكل المقابل يمثل دالة د: سه  $-$  صه فإن د $^{-1}$  (۲) = .....

د إذا كانت د دالة أحادية وكان د(٢) = ٦ فإن د (٦) = 
$$-1$$

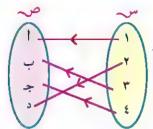
# ضع علامة ( ✓ ) أمام العبارة الصحيحة وعلامة ( ✗ ) أمام العبارة الخطأ:

$$(w) = \frac{1}{2} + w + \frac{1}{2}$$

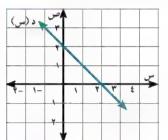
$$c(m) = 0 + \frac{3}{m}$$

$$1 \leqslant m$$
 حیث س  $1 + r$ 

- الشكل المقابل يمثل دالة د من سه إلى صه فأوجد قيمة د' (ب) + ۲ د' (ج).



(س) في كل من الأشكال الآتية. ارسم في نفس الشكل منحنى الدالة العكسية د- (س)



- - ٦) اكتشف الخطأ:
- حاول كل من وائل ورنا إيجاد الدالة العكسية للدالة د(س) = سرعه

- · · ص = سر ه
- . . س = <del>ص ه</del> بتبديل المتغيرات
- بالضرب التبادلي . . ص س = ص = ه
  - . . ص س = ص = ٥
  - . . ص (س ۱ ) = ۵
  - ٠٠٠ (س) = (س) ، ٠٠٠

- $\frac{1}{(m)} = (m)^{1}$   $\frac{1}{2}$
- .. د ارس) = ۱ س-ه
- = ۱ × <del>س -ه</del>
  - د ٔ (س) = س-ه

أي من الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

- سؤال مفتوح: هل يمكن أن تكون الدالة د هي نفسها الدالة العكسية د١٠٠ إن كانت العبارة صحيحة أعط أمثلة على ذلك.
  - في كل مما يأتي عين المجال الذي يكون فيه للدالة د دالة عكسية:

$$( \mathbf{w} ) = \mathbf{w}^{3}$$
  $( \mathbf{w} ) = \mathbf{w}^{3}$ 

# الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني

سوف تتعلم

◄ تعريف الدالة اللوغاريتمية.

◄ التحويل من الصورة الأسية إلى

الصورة اللوغاريتمية والعكس.

Logarithm

Inverse Function

Common Logarithm

◄ التمثير البياني للدالة

4 حل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة.

🐂 المصطلحات الأساسية

4 البوغاريتم المعتاد

لوغاريتم

♦ مجال

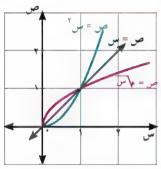
۱ دالة عكسية

اللوغاريتمية.

# Logarithmic Function and Its Graph

# التمثيل البياني للدالة العكسية للدالة الأسية

# استكشف 🔂



علمت أن الدالة ص = الس هي الدالة العكسية للدالة ص = ساً لكل س ≥ صفر (صورتها بالانعكاس في المستقيم ص = س)

فهل يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية دحيث د(س) = ٢٣ بيانيًا من خلال تمثيل قيم س، ص للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

# س



# الأدوات المستخدمة

♦ آلة حاسية.

♦ حاسب آلي.

نجد مما سبق أن معكوس  $ص = 7^m$  هو  $m = 7^{\infty}$  ويسمى المتغير m في المعادلة س = ٢ ص لوغاريتم س. ويكتب ص = لو س ويقرأ ص تساوي لوغاريتم س للأساس ٢

# 🔂 تعلم

# ارشادات للدراسة

الدالة اللوغاريتمية

إذا كان أ  $\in g^+$  إذا كان أ  $\in g^+$  إذا كان أ و من الدالة د حيث د: ع الدالة العكسية للدالة ص = أس

Logarithmic Function

وتسمى د(س) = لورس بالدالة اللوغاريتمية

 مدى الدالة اللوغاريتمية = ع ◄ مجال الدالة اللوغاريتمية = ع٠

◄ الصورة ص = لو س تكافئ الصورة أص = س

كتاب الرياضيات البحتة - علمي - الصف الثاني الثانوي

تسمى أوم س = ص بالصورة

اللوغاريتمية

# التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية:

$$\frac{1}{17} = {}^{\xi} \left( \frac{1}{Y} \right) \left( \rightleftharpoons \right)$$

# 🚹 حاول أن تحل

$$\frac{1}{170} = \frac{4}{100} \left( 3 \right) \qquad \frac{4}{100} = \frac{1}{100} \left( \frac{4}{100} \right) \left( \frac{4}{100} \right)$$

# اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠:

# التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية:

(ب) بوضع ص = لو ١٧٧

ص = ج

بالتحويل إلى الصورة الأسية

 $\frac{\Psi}{L} = \overline{\Psi}$  لذا فإن أو  $\Psi$ 

 $\Upsilon^{op} = \Upsilon^{\frac{7}{4}}$  من خواص الأسس

$$\frac{r}{\epsilon} = rv$$
 و  $\frac{1}{1 \cdot \epsilon} = r^{-1}$  تكافئ  $\frac{1}{1 \cdot \epsilon} = \frac{1}{1 \cdot \epsilon}$  و  $\frac{r}{\epsilon} = rv$ 

# 🗗 حاول أن تحل

# 🗘 حول من الصورة اللوغار يتمية للصورة الأسية:

# مثال حساب قيمة لوغاريتم عدد لأساس معلوم

( ) أوجد قيمة كل مما يأتي:

# 🚺 الحل

# ل بوضع ص =لو ۲۰۰۱،

بالتحويل إلى الصورة الأسية:

• 
$$1^{\infty} = (\frac{1}{1})^{\infty}$$
 وضع العدد بالصورة الأسية

$$^{-1}$$
 من خواص الأسس الأسس

# 🛂 حاول أن تحل



أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

🛖 الحل

المعادلة لكل قيم س التي تحقق ٢س - ٥ > صفر؛ أي س  $> \frac{\circ}{7}$  (مجال تعريف المتغير) وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة

$$\Lambda = \gamma - \gamma = \gamma - \gamma$$

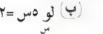
∴ 
$$w = 3 \in A$$
 مجال تعریف المتغیر ... مجموعة الحل هی  $\{3\}$ 

$$V - < m$$
 س  $> -7 >$  صفر  $V = 0$  س  $> -7$  المعادلة معرفة لقيم س التي تحقق  $V = 0$  س  $> 0$  س  $> 0$  س  $> 0$  س  $> 0$ 

أي ]صفر،∞[-{١} (مجال تعريف المتغير) ويتحويا المعادلة للصورة الأسية المكافئة

🚰 حاول أن تحل

٤ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:  $\frac{7}{8} \text{ for } m = \frac{7}{8}$ 





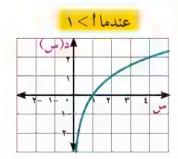


Graphical Representation of the Logarithmic Function

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية:

تمثل الدالة د حيث د(س) = لو س حيث أ لا بيانيًّا كما في الأشكال الآتية:

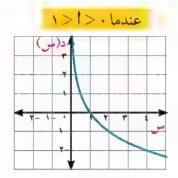
المجال: ع+ المدى: ع التقاطع مع محور س: (١، ٠) الاطراد: تزايدية ع-



المجال: ع" المدى: ع التقاطع مع محور س: (١، ٠)

الاطراد: تناقصية على مجالها ع+

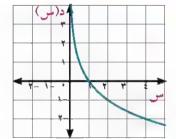
(ب د(س) = لو س



تفكير نلقد: هل يمكنك استنتاج العلاقة بين منحني الدالة الأسية ومنحني الدالة اللوغاريتمية وضح ذلك.



- ٣ مثل الدوال الآتية بيانيًا:
  - ا د (س) = لو س
    - 🔷 الحل
- 1 < ٢ الأساس ٢ > ١



# استخدام الآلة الحاسبة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد اللوغار يتمات على النحو الآتي:

- () لإيجاد لو ٤ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية:
- ٢) لإيجاد لو ٣٨ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية:

### تدريب

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل من:

log 3 8 = 1.579783597

(ف) لو ۱۲۸

log 2 (REPLAN) 4 =

ا لو الح



مكافئة:	وغار يتمية	ىصەرة (	مما بأتي	عن کا	عبً	(1)
,-00 0 0-			15			

$$1 = \frac{1}{q} =$$

ا لو ۱۲۰ = ۲ (پ) لو ٤
$$\sqrt{7}$$
 =  $\frac{0}{7}$  (ج) لو ۱ = صفر (۵) لو ۱۲۱ = ٤

٤ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

 $\xi = {}^{\xi}(Y)$ 

(۵) لو۳×۳

کے لیو (۲س + ۱) = صفر

0(3)

{\}. \a\_{\chi}

الح لو ١

٥ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

٦ مثل بيانيًّا كل من الدوال الآتية:

ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر، د حيث ر(س) = لو س، د(س) = ٦ - س، ثم استخدم ذلك في إيجاد مجموعة حل المعادلة لوس = ٦-س.

# اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

كتاب الرياضيات البحتة - علمي - الصف الثاني الثانوي

{Y- cY} ₹,

(۱۲) لو۱۰۰ = .....

1- 2 7 7 1

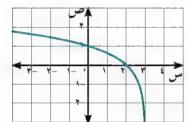
ا إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = لوم س يمر بالنقطة (٨، ٣): فإن د(٤) = .....

 $\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}$ 

الشكل المقابل يمثل الدالة ......كل المقابل يمثل الدالة .....

ا ص=۳<sup>---</sup> ب ص=۳<sup>---</sup>

م ص = لو (٣-س) ف ص = لو (٣-س)



- 10 أوجد قيمة س في كل مما يأتي وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:
- - أوجد قيمة كل مما يأتي وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:
- (٧) البيط بالتعليم: إذا كانت العلاقة بين درجات تذكر أحد الطلاب بالمعلومات التي درسها في الصف الأول الثانوي وعدد الأشهر (١٠) التي تبدأ من نهاية تدريس الصف هي: د(١٠) = ٧٠ ٤ لو (١٠ + ١) فأوجد درجات هذا الطالب:

أولًا: في نهاية تدريس الصف الأول الثانوي (١٠ = ٠)

ثانيًا: بعد مرور ٧ أشهر من تدريس الصف الأول الثانوي.

نطبيقات: في دراسة لقياس مدى احتفاظ الطلبة لما تم دراسته في أحد المواد يعاد امتحانهم من فترة إلى أخرى في نفس المادة. فإذا كانت درجات أحد الطلبة تتبع العلاقة د(0) = 0 - 0 لو(0 + 1) حيث 0 عدد

الأشهر بعد اكتمال الدراسة، د(ن) درجة الطالب (نسبة مئوية). أوجد.

- أ درجة الطالب في أول امتحان لهذه المادة.
- ب درجة الطالب بعد مرور ٣ أشهر من دراسته لهذه المادة.
- 🕏 درجة الطالب بعد مرور عام كامل من دراسته لهذه المادة.

دار النصر للطباعة (مدلاين)

# بعض خواص اللوغاريتمات

# 7 - 7

# Some Properties of Logarithms

# استکشف 😚

# باستخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

۱) (لو ٤٠ لو ١٨) ، لو ٢٢ ٢١ (لو ١٠٠ لو ٦) ، لو ١٠٠

٢) (لو ٢٧- لو ٩). لو ٣ ماذا تستنتج مما سبق؟



# بعض خواص اللوغاريتمات Some Properties of Logarithms

إذا كان ؛ فإن: أ ∈ع - ١١} فإن ١) او أ - ١ ٢) أو ١ = صفر

حاول إثبات كل من ١. ٢ من تعريف اللوغاريتم.

٣) خاصبة الضرب في اللوغارينمات

لو س ص = لو س + لو ص حيث س، ص ∈ ع' ا لإنبات صحة هذه الخاصية:

ضعب = لوس ، جـ = لوص

ومن تعريف اللوغاريتمات فإن:

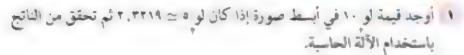
س=ا<sup>ب</sup> ، س=ا<sup>ب</sup>

فتكون س ص= الما المان س ص = المان س

ولتحويل هذه الصورة إلى الصورة اللوغارينمية تكون لوس ص=ب٠ج

وبالتعويض عن قيمني ب، جاتكون لوس ص = لوس الوص

# مثال



### الحل

لو ١٠ = لو (٢ × ٥)

= لو ٢٠ لو ٥ باستخدام خاصية الضرب في اللوغاريتمات ما ١٠ ٢٠٣١٩ من المعاصبة ١١ ا، بالتعريض عر او ٥ ٢٠٣١٩ ٢ ٢٠٣١٩

### سوف تتعلم

- ه استخداد بعض خواص اللو فاريخ ب
- وحوالعادلات اللوعاريسة
  - ٥ استخداد احاب في حق
    - المعدل ال
    - ه عليمان حابية على الموعاريتيات

### المصطلحات الاساسية

٢ معادثة لو خارسمه

Logarithmic Equations

ا مضاس پُد

Aschiber Scotter

### الأدوات المستخدمة

- ه له حاسبه علیه
- ا حسب ألى مرود مرامح

رسومة

# التحقيق باستخدام الآلة الحاسبة:

log 2 (ans) 1 0 =

# 🚹 حاول أن تحل

( ) أوجد قيمة لو ١٥ في أبسط صورة إذا كان لو ٥  $\simeq$  ١,٤٦٥ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

# ٤) خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

(حاول أن تثبت صحة العلاقة)

# مثال

٧ أوجد قيمة المقدار: لو٣٠ - لو٣.

الحل 🔷

لو ۳۰ - لو ۳ = لو ۳۰ = لو ۱ = ۱

🚹 حاول أن تحل

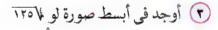
٢ أثبت باستخدام خاصية القسمة في اللوغار يتمات أن: لو ٢ = ١ - لو ٥

حيث ن ∈ع،س>٠

3.321928095

٥) خاصية لوغاريتم القوة:





الحل 🔷

 $\underbrace{\text{le }\sqrt[4]{\circ 1/}}_{\circ} = \underbrace{\text{le }\left(\circ\right)^{\frac{\pi}{3}}}_{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{3}\underbrace{\text{le }\left(\circ\right)^{\frac{\pi}{3}}}_{\frac{3}{2}} \times I = \frac{\pi}{3}$ 

🚹 حاول أن تحل

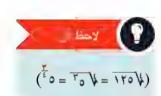
٣ ضع في أبسط صورة

لو ١٤٣٧ ، لو ١٤٣٧

لاحظ أن: لو ( ال ) = - لو س حيث س ∈ ع +

٦) خاصية تغيير الأساس:

إذا كانت س ∈ ع.، ص، أ ∈ ع<sup>+</sup> - {۱}، أثبت أن: لو س = لو ص



91

### (لا يمتحن فيه الطالب)

بوضع: ع = لو س

بالتحويل إلى الصورة الأسية يأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

# 🚹 حاول أن تحل

(ب) لو ۲٤٣

استخدم الخاصية السابقة في إيجاد قيمة كل من: ١ لو ٨

٧- خاصية المعكوس الضربي: لو ب لو ا

 $x = \frac{1}{100}$  ثفكي نلقد: إذا كانت أ، ب  $y = \frac{1}{100}$  فأثبت أن لو ب =  $\frac{1}{100}$  ثم استخدم ذلك لإيجاد قيمة: لو  $y \times y$  لو  $y \times y$  في أبسط صورة.

# كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة،

# مثال

٤ اختصر الأبسط صورة:

1) 
$$Y = (-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + Y = (-1 + \frac{1}{$$

(ب) لو ۶۹×لو ٥×لو ٨×لو ٩

🔷 الحل

i) المقدار = لو 
$$07^7 + \frac{\Lambda}{10} + \frac{\Lambda}{10} + \frac{\Lambda}{10} + \frac{\Lambda}{10}$$
 خاصیة  $0$  =  $\frac{\Lambda}{10} + \frac{\Lambda}{10} \times \frac{\Lambda}{10} \times \frac{\Lambda}{10} \times \frac{\Lambda}{10}$  خاصیة  $0$  3

المقدار = 
$$\frac{\text{le}^{83}}{\text{le}^{9}} \times \frac{\text{le}^{8}}{\text{le}^{8}} \times \frac{\text{le}^{8}}{\text{le}^{8}} \times \frac{\text{le}^{8}}{\text{le}^{9}}$$

$$= \frac{\text{le}^{83}}{\text{le}^{9}} = \frac{\text{Tle}^{9}}{\text{le}^{9}} \times \frac{\text{le}^{9}}{\text{le}^{9}} \times$$

# 🚹 حاول أن تحل

$$T = \frac{ie^{-VY} - ie^{3}}{ie^{-V}}$$
 اثبت أن:  $\frac{ie^{-VY} - ie^{3}}{ie^{-V}}$ 

### Solving Logarithmic Equations

### حل المعادلات اللوغاريتمية

# مثال

أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

### 贪 الحل

المعادلة معرفة لكل س  $\in \{$ س:س - ۱ > صفر  $\}$   $\cap \{$ س:س + ۱ > صفر  $\}$ 

$$\pi \pm = 0$$
 easily  $\pi = \pi$ ...

$$\Lambda = 1 - 7$$
 ...

وحيث إن س = - الا تنتمي لمجال تعريف المتغير .. مجموعة الحل = {٣}

# 🚰 حاول أن تحل

أوجد مجموعة حل كلِّ من المعادلات الآتية في ع:

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات Solving Exponential Equations Using Logarithms

### づ مثال استخدام الآلة الحاسبة في حل المعادلات اللوغاريتمية

أوجد قيمة س في كلِّ مما يأتي مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين. 
$$(\mathbf{r})$$
  $\mathbf{r}$ 

# 🔷 الحل

$$1,77 \simeq m = \frac{\log n}{\log r}$$
 . . س  $r \simeq 1,77$ 

# استخدام الآلة الحاسبة:

# ب ه ۲-۳ = × ۲ الطرفين المطرفين ۱+۳۰ ع × ۳ = ۲ المطرفين

$$\cdot$$
.  $(m-7)$  Le 0 = Le  $m+1$  Le 3 =  $m-1$  Le 3 = Le  $m-1$  Le 3 = Le 3 + Le 3 ...

# استخدم الآلة الحاسبة:

- 🚹 حاول أن تحل
- أوجد قيمة س الأقرب رقم عشري واحد في كل مما يأتي:

# مثال تطبيقات على قوانين اللوغاريتمات

- الربط بالحبولوجيان إذا كانت درجة قوة الزلزال على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة c = b عيث هـ هي شدة الزلزال، هم الشدة الابتدائية، وتعرف بالمقياس الصفرى لشدة الزلزال (أقل شدة لحركة الأرض بحيث لا يسجلها المقياس).
  - أوجد على مقياس ريختر درجة الزلزال الذي شدته تعادل ١٠٠ مرة قدره الشدة الابتدائية.
    - ب في عام ١٩٨٩ حدث زلزال بقوة ٧,١ على مقياس ريختر. احسب شدته.
      - 🔵 الحل

أي أن الزلزال درجته ٦ على مقياس ريختر.

ب : درجة الزلزال = ۷,۱

أي أن شدة الزلزال تعادل ١٢٥٩٠٠٠٠ مرة تقريبًا قدر الشدة الابتدائية.

# 🚹 حاول أن تحل

- المكان ، به السنة المدن ابتداء من عام ۲۰۱۰ يُعطى بالعلاقة ع = ۱۰ (۱٫۳) بحيث ع عدد السكان ، به السنة
  - الحسب عدد سكان هذه المدينة عام ٢٠١٥
  - في أي سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ١,٤ مليون نسمة.



بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

اختصر لأبسط صورة
 أ لو۲+لوه

ف لو ه×لو ۲

آ لو ا + لو ب + لو ج ع لو ١٢ + لو ١٢ الو ١٢

علامة ( $\checkmark$ ) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ، حيث س ، ص  $\in$  ع' ، أ،  $\psi$  = ع' - {۱}:

() 
$$(v_{0}^{2}) = (v_{0}^{2}) + (v_{0}^{2}) = (v_{0}^{2})$$

() 
$$\frac{\text{le m}}{\text{le m}} = \frac{\text{le m}}{\text{le m$$

() 
$$= 3 \log_{10} m^{2} = 3 \log_{10} m^{2}$$

- ا فا کان لو ۲ =  $m^{\Lambda}$ ، لو ۳ = m أوجد بدلالة m ، m کل من: لو ۲ ا
  - ٥ أوجد قيمة س في كل مما يأتي مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

$$V = \frac{0}{100} \text{ Mpc}^{-1} = 0$$
 $V = \frac{0}{100} \text{ Mpc}^{-1} = 0$ 
 $V = \frac{0}{100} \text{ Mpc}^{-1} = 0$ 
 $V = \frac{0}{100} \text{ Mpc}^{-1} = 0$ 

أوجد في ع مجموعة حل كلِّ من المعادلات الآتية:

رج ۲ لو ٥ - ۳ لو ۷ - ۳ او ۷ د ۲۰۰۷

- A استخدم الحاسبة في إيجاد عدد أرقام العدد ٤ ٧٤
- الربط بالكيمياع: يعرف الرقم الهيدروجيني للمحلول (PH) على أنه سالب لوغاريتم تركيز الهيدروجين في
   المحلول (H<sup>+</sup>) أي أن: (++) أي أن: (++)
  - الحسب الرقم الهيدروجيني لمحلول تركيز الهيدروجين فيه 10-3
    - و احسب تركيز الهيدروجين في محلول رقمه الهيدروجيني 9
  - 👀 البيط بالسكان: إذا كان عدد سكان احد المدن يتزايد بمعدل سنوى قدره ٧٪
    - أوجد العلاقة التي توضح عدد السكان بعد عام.
    - بعد كم سنة يتضاعف عدد السكان إذا استمرت الزيادة بهذا المعدل.
      - (١) إذا كان س = ٥ + ٢ ١ أوجد في أبسط صورة قيمة لو (١٠ + س)
  - (٢٠ اكتشف الخطلة قامت كل من أميرة و إسراء بحل السؤال اختصر : لو س٣ + لو ص ع لو س ص

# -4,=

U\_ b

Itanical (
$$= \frac{w^{7} \times w^{3}}{w^{7} + w^{7}} = \frac{w^{7} + w^{7}}{w^{7} + w^{7}} = \frac{w^{7} + w^{7}}{w^{7}} = \frac{w^{7}}{w^{7}} = \frac{w^{7}}{w^{$$

أي الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

تفكير ليداعون بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة:



لمزيد من التهارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

### ملخص الوحدة

### 1) الأسس الصحيحة 🦳

- را  $\int_{0}^{1} = f \times f \times f \times f \times f$  (العامل أمكرر نه من المرات)
- ٠ + ا شيم ا = ١ ا حيث ا ∈ ع {٠}
  - ٧) قوانين الأسس الصحيحة لكل م ، ب ∈ ص ، أ ، ب ٰ ∈ع {٠} ، فإن:

- الجذور النونية المعادلة س = أحيث أ  $\in$  ع،  $\cup$  ص + لها  $\cup$  من الجذور
- ا) معدد زوجى ، أ  $\in 3^+$  يوجد جذران حقيقيان (باقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)، أحدهما موجب والآخر سالب، ويسمى الجذر الموجب بالجذر الأساسى، ويرمز له بالرمز  $\sqrt[3]{1}$ 
  - ب به عدد زوجي ، أ ∈ع ليس للمعادلة جذور حقيقية (جميع الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)
- ب فردى ، أ ∈ ع يوجد للمعادلة جذر حقيقي وحيد (باقي الجذور أعداد مركبةغير حقيقية)، ويسمى هذا
   الجذر بالجذر الأساسى
- (a)  $v \in (a)^+$  ، (a) عصفر يوجد للمعادلة حل وحيد هو الصفر (لها v من الجذور المكررة وكل منها يساوى صفر).
  - ٤) خواص الجذور النونية؛ إذا كان ١٦٠ ، ١٠ وع فإن:
  - ٠ ≠ ٠ + ١١٠ = ١١٠ (١) المالب = ١١٠ المالب على المالب
  - ج) ١٩٠٤ = (١٤٠) = أن نه زوجي الما إذا كان نه زوجي الما إذا كان نه زوجي

# ٥) الأسس الكسرية

- علی ذلك یکون  $1^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{1})^2 = \sqrt[3]{1}$  حیث  $1 \in \mathcal{S}$ ، م، نه عددان صحیحان لیس بینهما عامل مشترك، 0 > 1، 0 > 1، 0 > 1 من مشترك،
  - الدالة الأسية: إذا كانت د: ع →ع + حيث د(س) = أس لكل أ∈ع+- {١} فإن د تسمى دالة أسية أساسها أ
    - (v) خواص منحنى الدالة الأسية : د $(w) = \int_{0}^{\infty} (1)^{-1}$  مجال الدالة = ع
      - الدالة متزايدة على مجالها لكل أ > ١ وتسمى بدالة النمو الأسى معامله أ.
      - الدالة متناقصة على مجالها لكل ٠ < أح١ وتسمى بدالة التضاؤل الأسى معامله أ.</li>

- الدالة العكسية إذا كانت د دالة أحادية من مجموعة سم إلى مجموعة صم، فإن الدالة د' من صم إلى سم تسمى دالة عكسية للدالة د إذا كان لكل (س ، ص)  $\in$  د فإن (ص ، س)  $\in$  د'
  - 1) منحنى الدالة  $c^{-1}$  هو صورة منحنى c بالانعكاس فى المستقيم c = c .
- 1) لكى يكون للدالة د دالة عكسية على فترة معينة يجب أن تكون د دالة أحادية على نفس الفترة أي يحقق منحنى د اختبار الخط الأفقى (إذا قطع أى مستقيم أفقى المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة أحادية).
  - ◄ يقال إن د(س) ، ر(س) دالة عكسية للأخرى إذا كان (د ر) (س)= س، (ر د) (س) = س
    - ◄ مجال الدالة د(س) هو مدى الدالة العكسية د- (س)
    - ◄ ومدى الدالة د(س) هو مجال الدالة العكسية د' (س)

# ١٢) الدالة اللوغاريتمية

- [ ] إذا كانت أ ∈ع {١} فإن الدالة ص = لو س هي الدالة العكسية للدالة الأسية ص = أ
- ب البه = جه فإن ب = لو جه (التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس).
  - ح اللوغاريتم المعتاد: هو لوغاريتم اساسه ١٠ (لاحظ أن لو ٥ = لو ٥ }
- 11 مُواص الدالة اللوغاريتمية ل مجال الدالة =ع المدى = ع
  - الدالة ص= لو س متزايدة لكل 1 > 1 ومتناقصة لكل < 1 < 1
    - ١٤ ( ) خواص اللوغار يتمات: إذا كانتأ∈ع {١}
- ال او ا ۱ الله ۱
  - ف لو س + لو ص = لو س ص حيث س، ص > صفر
  - ه لو س لو ص = لو <del>س</del> حيث س، ص > صفر
  - و لو س = بر الو س > صفر ، أ، ب ∈ ع {۱} و لو س × لو أ = ۱ الو أ س × لو أ = ۱ الو أ س × لو أ = ۱ الو أ س × لو أ = ۱

# قم بزيارة المواقع الآتية:



- أوجد قيمة كل من:
   ا (-٣٢) <sup>‡</sup>
- ٣- ١٦ 🖟 (ب)

(ج) لو<sub>۲۰۱</sub>۰ (۲۰۰۰)

اختصر لأبسط صورة:

ج لو ٤ + ٢ لو ٣

🔻 أوجد مجموعة حل المعادلة:

أ ٢ " = ١٠ مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى.

1-= 1-0" ++ 1+0" + - 0" + ?

(ب لوه س + لوه ٣ = ٢ د س <sup>بن</sup> - ٣٣س <sup>ث</sup> + ٣٢ = صفر

9 (5)

91(5)

(د) صفر

- ٤ اختر الإجابة الصحيحة:

- - (0) إذا كان لو  $(m + m) = \frac{1}{7}$  ( لو m + be m + be ) + be 1 find be m = m.
- الربط بالفينياء: يعطى الزمن الدورى للبندول بالعلاقة ن =  $\pi \sqrt{\frac{U}{s}}$ ، حيث ن الزمن بالثوانى، ل طول البندول بالسم، ك عجلة السقوط الحر وتساوى ٩,٨ م/ث
  - ل أوجد الزمن لبندول كبير طوله ٧٣سم.
  - ب يراد تصنيع بندول لا يستغرق أكثر من ١٠ ثانية لاتمام دورته. كم يجب أن يكون طول البندول؟
- ✔ البيط بالجيه الهجيان تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس رختر، وتعطى قوة الهزة م بالعلاقة: م = لوس، حيث س سعة الموجة التي تسبب حركة الأرض. كم مرة تعادل سعة موجة هزة أرضية سجلت ١٠ درجات على مقياس رختر من سعة هزة أرضية أخرى سجلت ٧ درجات على نفس المقياس.



مدرجات تعلم الوحدة









# مقدمة في النهايات

# Introduction to Limits of Functions

### سوف تتعلم

♦ الكميات غير المعينة.

◄ نهاية دالة عند نقطة.

يعتبر مفهوم نهاية دالة عند نقطة من المفاهيم الأساسية في علم التفاضل. وفي هذه الوحدة سوف نتعرف على مفهوم نهاية الدالة من الناحية البيانية والجبرية. ولكن قبل ذلك دعنا نتعرف على أنواع الكميات في مجموعة الأعداد الحقيقية.

# 🗱 فکر و ناقش

أوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكنك ذلك:

£ ÷ YA (1)

\* ÷ \* (0) \* ÷ V (£)

 $\infty - \infty$  (A)  $\infty \div \infty$  (V)

T + 00 (1)

9-5

حيث س = {-∞} ل س ا (∞}

Unspecified Quantities

محموعة الأعداد الحقيقية

يرمز لها بالرمز ح

(Q)

∞ هی رمز یدل علی کمیة

غير محدودة أكبر من أي عدد حقيقي يمكن تصوره أو تخيله.

الكميات غير المعينة:



Extended Real Numbers

♦ نهاية يسري Left Limit

♦ قىمة دالة Value of a Function

السناية دالة Limit of a Function ♦

### 🛺 المصطلحات الأساسية

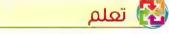
◄ كمية غير معينة

اغیر معرف

Unspecified Quantities

🕨 تهاية يمني Right Limit

◄ مجموعة الأعداد الحقيقية المتدة



في بند (فكر وناقش) نجد أن بعض نواتج العمليات محدد تمامًا مثل رقم ١ ، ٢ ، ٣ بينما بعض النواتج لايمكن تحديدها مثل باقي العمليات.

لاحظ أن: ٧ ÷ · غير معرفة حيث أن القسمة على صفر لامعنى لها.

والآن لا يمكن تحديد ناتج العملية ٠٠٠٠

حيث يوجد عدد لا نهائي من الأعداد إذا ضرب كل منها في صفر كان الناتج صفرًا، لذلك فإن - كمية غير معينة، ومن الكميات غير المعينة أيضًا:

 $\infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $+ \times \infty$  (bail?)



تجرى العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والرمزين ∞، - ∞ كالآتي:

لكل أ ∈ع فإن:

00= + 00 - 1

00 -= 1 + 00- -Y

 $\begin{array}{ccc} \cdot & & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & \\ \end{array}$ 

◄ آلة حاسبة علمية.

◄ برامج رسومية للحاسوب.

# مثال 👩

- أوجد ناتج العمليات الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا:
- ++0-(3) (ب, ۳<sub>-</sub>∞

 $\infty \times 0$  )

00+2]

∞-×1- →

- . + . (9)
- 00 + 00 A
- 🛖 الحل
- ر**پ**) ـ ∞ . (7)

∞ (**→**)

(د) غير معرفة

- $_{\infty}$  (i)و كملة غير معينة
- 00 (4

∞ (1

## 🚰 حاول أن تحل

🕦 أوجد ناتج العمليات الآتية في مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا

- (پ) ۷÷۰

+×∞(3)

 $\infty \div \infty$   $\longrightarrow$ 

 $\infty + \infty$  ( $\downarrow$ )

00 ÷ 9 (₹)

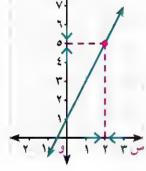
- 17 + (0 -) (9)

### نهاية دالة عند نقطة:

(Y -) ÷ ∗ []

∞×(V-) ♠

ادرس قيم الدالة د حيث د (س) = ٢س + ١ عندما تقترب س من ٢ من خلال بيانات الجدول



	7020
£,A	1,9
£,¶A	4,44
£,99A	1,999
£,999A	1,9999
***	, ,
<b>↓</b>	<b>1</b>
o ← (T) > o	س → ۲ <sup>-</sup>

C Comment	The state of the s
٥, ٢	۲,۱
<b>8</b> , • ¥	۲, «۱
2, 4 4 7	Y, 4 + 1
9, 4 4 4.4	₹, 4 4 4 4
**** *	
<b>↓</b>	<b>+</b>
د(۲٫٠) → ه	س ← ۲

### نلاحظ من النشاط السابق أن:

عندما تقترب س من اليمين ومن اليسار من العدد (٢) فإن د(س) تقترب من العدد (٥)



إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل ، عندما تقترب س من أ من جهتي اليمين واليسار، فإن نهاية

د(س) تساوی ل وتکتب رمزیًا: نها د(س) = ل

وتقرأ: نهاية د(س) عندما تقترب س من أتساوى ل

## تقدير النهاية (النهاية تساوى قيمة الدالة)

قدر نہا (۲-۳س) بیانیًا وعددیًا 
 قدر سے۲ (۲-۳س) بیانیًا وعددیًا

### 🕠 الحل

🥌 مثال

بيانيًا: تمثل الدالة الخطية: ص = ٢ - ٣س بيانيًّا كما بالشكل المقابل:

عندما س ← ۲ فإن د(س) ← -٤

عدديًا: نكون جدولاً لقيم د(س) وذلك باختيار قيم س تكون قريبة من العدد ٢ من جهة اليمين وجهة اليسار كالآتى:

									س
۳,۷	٣,9٧-	4,994-	<b>─</b>	€-	<del></del>	٤,٠٠٣-	٤, +٣-	٤,٣-	د(س)

◄ يبين الجدول أنه كلما س اقترب من العدد ٢ من اليمين أو اليسار فإن قيم د(س) تقترب من العدد -٤

### 🕞 حاول أن تحل

(٢) قدر نهاية كل ممايأتي بيانيًا وعدديًا.

## تقدير النهاية (النهاية لاتساوى قيمة الدالة)

 قدر نہا سر۲-٤ بیانیا وعددیاً.
 س-۲ بیانیا وعددیاً.

### الحل 🕠

بيانيًّا: يبين الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة دحيث: د(س) =  $\frac{m^7 - 3}{m - 7}$  حيث س  $\neq 7$ .

ونلاحظ من الشكل أنه عندما س  $\rightarrow$  ۲ فإن قيمة د(س)  $\rightarrow$  ٤

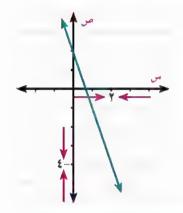
عدديًّا: نكون جدولاً لقيم د(س) ، وذلك باختيار قيم س القريبة من العدد ٢

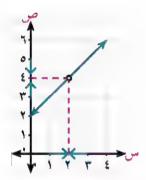
1,9	1,99	1,999	<b>─</b>	۲	-	۲,۰۰۱	Y,+1	۲,۱	س
٣,٩	٣,99	7,999	<i>→</i>	٤	-	٤,٠٠١	٤,٠١	٤٥١	د(س)ء

◄ يبين الجدول أنه كلما اقتربت س من العدد ٢ من اليمين أو اليسار فإن قيم د(س) تقترب من العدد ٤.

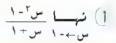
### لاحظ من هذا المثال أن:

١) الفجوة في الشكل البياني تعني حالة من حالات عدم التعيين - عندما س = ٢





- ٢) وجود نهاية للدالة عندما س → ٢ لاتعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = ٢ حيث إن س  $\in$  g  $\{7\}$  وهذه الملاحظة توضح مفهومًا مهما في النهايات.
  - 🚹 حاول أن تحل
  - ٣ قدر نهاية كل ممايأتي بيانيًّا وعدديًّا:





استخدام التكنولوجيا في إيجاد نهاية دالة عند نقطة (الحاسبة البيانية)

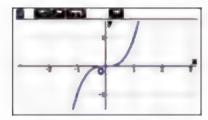
استخدم الحاسبة البيانية في رسم منحنى الدالة د، ثم قدر نهاية الدالة عند النقطة المبينة:

د(س) = 
$$m^7$$
عند س  $\longrightarrow$  صفر (۱

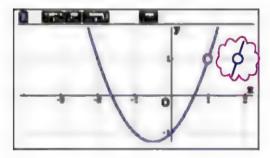
$$1 \longleftarrow (m) = (\frac{m^{2}-1}{m-1}) = (m)$$
 (Y

يمكن استخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية مثل (Geogebra)

في الحاسب الألى أو في التابلت لرسم منحنى الدالة كالآتى:

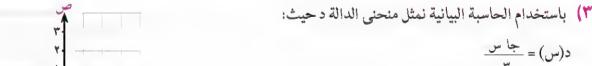


(۱) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالةد حيث: د(س) = س من الرسم نها د(س) = صفر



الدالة د حيث الدالة د حيث الدالة د حيث درس) =  $\left(\frac{w^{7}-1}{w-1}\right)$  - ۲ من الرسم نها درس) = ۱

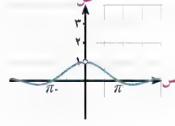
(لاحظ الفجوة عند النقطة (١،١)



من الرسم نجد أن نها جاس = ١

نستنتج من النشاط السابق أن:

إن وجود نهاية الدالة عندما س $\longrightarrow$  ألا يعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ

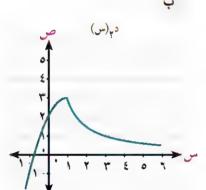


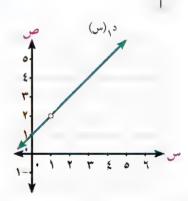
تفكير ناقد: إذا كانت الدالة د معرفة عند س = أ فهل هذا يعنى وجود النهاية عند أفسر إجابتك. تدريب على النشاط: باستخدام الحاسبة البيانية أو بأحد البرامج الرسومية للحاسوب أو التابلت قدر كلًا مما يأتى:



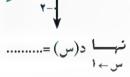
١ قدر نهاية كل من الدوال الآتية عند س ← ١

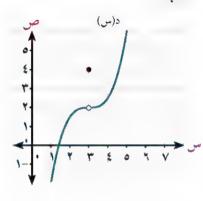
(m) compared to the compared t

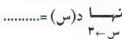


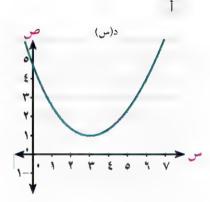


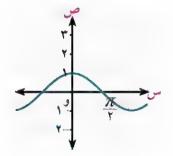
قدر نهاية كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة:



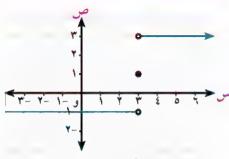


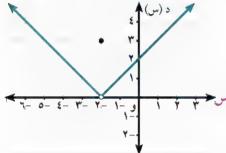


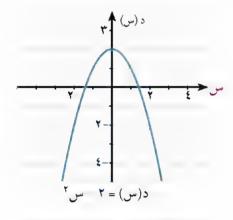


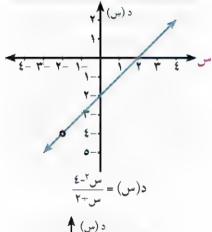


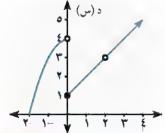
- ٣ من الرسم البياني أوجد:
  - i نہا د(س)س → ·
    - (٠) ·











- ٤ من الرسم البيائي المقابل أوجد
  - آ) نہا د(س) س←۳
    - ب د (۳)
- ٥ من الرسم البياني المقابل أوجد:

- ب) د(- ۲)
- ج) ئہا د(س) س → ۰
  - (+)3 3
- ٦ من الشكل البياني المقابل أوجد:
  - أ) ئہا (۲-س۲) س - م
    - ب د(٠)
- 👽 من الشكل البياني المقابل أوجد:
  - - پ د(- ۲)
- ٨ من الشكل البياني المقابل أوجد:
- رب نها د(س)
- (·) s J
- س نہاد(س) س×۲
- (Y) 2 😤

الجدول الآتي واستنتج نها د(س) حيث د(س) = ٥ س + ٤ عيث د الجدول الآتي واستنتج نها د

أكمل الجدول الآتي واستنتج نهـــا (٣س+١)

المجدول الآتي واستنتج نہا  $\frac{m^{1-1}}{m}$  أكمل الجدول الآتي واستنتج  $\frac{m+1}{m}$ 

الكمل الجدول الآتي واستنتج نها سعه المحدول الآتي واستنتج مله المحدول الآتي

r,1 r,.1 r,..1 » r «— 1,999 1,99 1,9

- الإرشادية. و أحد البرامج الرسومية قدر نهاية كل ممايأتي ثم حقق إجابتك باستخدام القيم الإرشادية.
  - ا نہا (۳س-٤)
  - 1+" (-) (-) (-)
  - ه **نہا** (س+جاس) س+۰
    - ز) نہا <sub>سے</sub> ا

- (پ نہا (س۲-٤)
- 1 + m + m m m m m m
- رو بها جاس-س
  - رح ن<u>ا</u> اس ا

سوف تتعلم

قيمة نهاية دالة.

◄ نهاية الدالة كثرة الحدود. ◄ بعض نظريات النهايات.

◄ استخدام القسمة المطولة في إيجاد

استخدام النظرية
 نوا = سدان النظرية
 نسا = سرا = نان - ۱

المصطلحات الأساسية السابة دالة Limit of a Function

Polynomial Function

Direct Substitution

Factorization

Conjugate

♦ دالة كثيرة الحدود

اتعویض مباشر

◄ تحليل

♦ المرافق

# إيجاد نهاية الدالة جبريًا

Finding the Limit of a Function Algebraically

تعلمت كيفية تعيين نهاية دالة عند س = أبيانيًّا أو عدديًّا عن طريق دراسة قيم الدالة بالقرب من س = أوفيما يلي بعض النظريات والنتائج التي تساعد في إيجاد نهاية دالة دون اللجوء إلى الرسم البياني أو دراسة قيم الدالة.

# نشاط 🛞

استخدم أحد برامج الحاسوب الرسومية في رسم الشكل البياني لكل من الدالتين:

$$c_{1}(m) = \frac{m^{2} - m - 7}{m - 7}$$
,  $c_{2}(m) = m + 1$ 

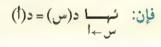
ماذا تلاحظ؟

ماذا تستنتج؟



نهاية الدالة كثيرة الحدود Limit of a Polynomial Function

◄ إذا كانت د(س) كثيرة حدود، أ ∈ ع



♦ قسمة تركيبية Synthetic Division

♦ آلة حاسة علمية.

◄ برامج رسومية للحاسوب.

# الأدوات المستخدمة

تسمى الدالة د كثيرة حدود إذا كانت على الصورة

د(س) = أ + أس + أيس المستعلمة إيسانا

حيث: ن ∈ط، أرلح صفر،

ان ان ... از ∈ع

## التعويض المباشر

أوجد نهاية كل من الدوال الآتية:

ب نہا (-٤) س ← ۳

🕜 الحل

مثال 🗂

س ←۲ = ع - ٦ + ۵ = ۳ (بالتعويض المباشر)

لاحظ أن د(س) = -٤ ثابتة لكل قيم س ∈ ع

### 🚼 حاول أن تحل

- ( ) أوجد كلَّا من النهايات الآتية:
  - ا نہا (۲س-۵)
- (ب نہا (۳س۲+س-٤) (۳ س-۲- س-۲) س-۲
  - اذا كان نها د(س) = ل ، نها ق (س) = م س ا س ا فإن:

- - (۱) نہا ك د(س) = ك.ل حيث ك ∈ ع س ← ا
- ۲) نہا [د(س) ± ق،(س)] = ل ± م
- $\frac{c(m)}{m} = \frac{b}{b}$  بشرط  $\frac{c(m)}{b} = \frac{b}{b}$
- **٣) نهيا** د(س). ق(س) = ل.م س ما د
- ٥) نها (د(س))ن=لن حيث لن ∈ ع س ا

# استخدام النظرية



# (٢) أوجِد كلًّا من اللهايات الآتية:

(پ) ئہا (\square 3m + - 4)

### 🔷 الحل

$$\frac{Y-}{W} = \frac{\xi}{\eta_{-}} = \frac{V+1-\times W}{W-1-(1-)} = \frac{V+W^{+}}{W-1-(1-)} = \frac{V+W^{+}}{W-1-(1-$$

$$\overline{17} = \overline{7 - 17} = \overline{7 - 7} (7 - ) = \overline{7 - 7} (7 - ) = \overline{7 - 7} = \overline{7 - 7}$$

- 🗗 حاول أن تحل
- ۲ احسب النهايات الآتية:

# (ب) نہا √ ۲س۲+۱ س -۲

## إيجاد نهاية الدالة عند حالات عدم التعيين

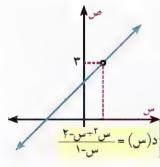
لا يمكن إيجاد نها د(س) حيث د(س) =  $\frac{m^7 + m^{-7}}{m - 1}$  باستخدام التعويض المباشر

حيث نصل إلى إحدى حالات عدم التعين صفر ، ويبين الشكل المقابل

التمثيل البياني للدالة دحيث نجد أن نها د(س) = ٣

وبعد تبسيط الدالة د واختصار العوامل المتشابهة غير الصفرية نصل للدالة

ق (س) = س + ۲ حيث ق (س) = د(س) لجميع قيم س ∈ع - {١}.





# مثال 👩

## استخدام التحليل

- استخدم التحليل لإيجاد النهايات الآتية:
- $\frac{1+r_{m}r_{-m}}{r_{-m}} \underbrace{\frac{1+r_{m}r_{-m}r_{m}}{r_{-m}r_{m}}}_{1\leftarrow m} \underbrace{\psi})$

1 - m + m - 1

### 👍 الحل

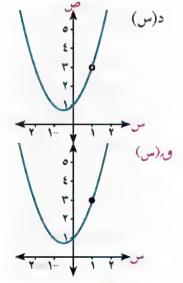
ا نلاحظ أن د(س) = 
$$\frac{m^{2}-1}{m-1}$$
 غير معينة عند س = ١

بالتحليل والقسمة على العوامل المتشابهة غير الصفرية فإنه يمكن كتابة درس) على الصورة.

$$c(m) = \frac{(m-1)(m^{2}+m+1)}{(m-1)} = m^{2}+m+1 = 0$$

من ذلك نجد إن د(س) = ق (س) لكل س ≠ ١

فإنه طبقًا للنظّرية ٣ نستنتج أن نها د(س) = ٣ س - ١



### طريقة القسمة المطولة

فى عملية القسمة المطولة (١) نرتب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه ترتيبًا تصاعديًّا أو تنازليًّا بنفس الطريقة.

(۲) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.

(٣) نضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه ويطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقي.

(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء عملية القسمة

### تسمى طريقة القسمة التركسية

نستخدم في هذه الطريقة معاملات كثيرات الحدود كما يلي:

خطوة ل: نكتب معاملات المقسوم مرتبه تنازليًّا وتساوى المعاملات + ١ - ٢ - ١ ويمة س المقسوم عليه بالصفر للحصول على قيمة س كما بالشكل:

خطهة " كرر عمليتي الضرب والجمع.

$$\frac{1}{T} = \frac{1 - w^{-1}w}{w \to 1} = \frac{(w - 1)(w^{2} - w - 1)}{(w + 1)(w + 1)} = \frac{1}{w \to 1} = \frac{1 - w^{-1}w}{w \to 1} = \frac{1 - w^{2}w}{w \to 1$$

### 🚹 حاول أن تحل

### ٣ أوجد:



## استخدام المرافق



Conjugate

لذلك نبحث عن طرق نتخلص بها من العامل (س - ٤)، من كل من البسط و المقام.

$$\frac{1-\overline{Y}-\overline{W}}{(1+\overline{Y}-\overline{W})(\xi-\overline{W})} = \frac{1+\overline{Y}-\overline{W}}{1+\overline{Y}-\overline{W}} \times \frac{1-\overline{Y}-\overline{W}}{\xi-\overline{W}} \times \frac{1-\overline{Y}-\overline{W}}{\xi-\overline{W}}$$

$$\frac{(\xi-\overline{W})}{(1+\overline{Y}-\overline{W})(\xi-\overline{W})} = \frac{1}{\xi-\overline{W}} = \frac{1}{\xi-\overline{W}}$$

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{1+\overline{Y}-\overline{W}} = \frac{1}{\xi-\overline{W}}$$

$$\frac{m+\overline{\xi+m}\sqrt{k}}{m+\overline{\xi+m}\sqrt{k}} \times \frac{m^{0}-r^{0}}{r-\overline{\xi+m}\sqrt{k}} \xrightarrow{0 \leftarrow m} = \frac{m^{0}-r^{0}}{r-\overline{\xi+m}\sqrt{k}} \xrightarrow{0 \leftarrow m} \xrightarrow{0 \leftarrow m}$$

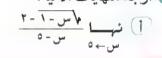
$$\frac{(m+\overline{\xi}+m)(n-0)(n-m)}{(n-m)} = \frac{(m+\overline{\xi}+m)(n-0)(m-m)}{(n-m)} = \frac{(m+\overline{\xi}+m)(n-m)(m-m)}{(n-m)} = \frac{(m+\overline{\xi}+m)(m-m)(m-m)}{(m-m)} = \frac{(m+\overline{\xi}+m)(m-m)}{(m-m)} = \frac{(m+\overline{\xi}+m)(m)}{(m-m)} = \frac{(m+\overline{\xi}+m)(m)}{(m-m)} = \frac{(m+\overline{\xi}+m)(m)}{(m-m)} = \frac{(m+\overline{\xi}+m)}{(m-m)} = \frac{(m+$$

$$T \circ = (T + T) \circ = (T + \overline{2} + T) = 0$$

### 🗗 حاول أن تحل

٤ أوجد النهايات الآتية:

$$\frac{1+m}{1-n+m} \underbrace{\frac{1}{n-m}}_{n-m} \underbrace{\frac{1}{m}}_{n-m} \underbrace{\frac{1$$



ا إذا كانت الدالة د على الصورة د (س) =  $\frac{m^{c-1}}{m-1}$  فإن نها  $\frac{m^{c-1}}{m-1}$  = ن اندالة



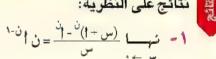
استعن بمعلمك للبحث في الشبكة العنكبوتية (الإنترنت) عن طرق برهان النظرية (٤).

إيجاد نهاية دالة عند نقطة باستخدام نظرية (٤)



- اوجد نہا س⁴-۱۸
   س→۳ س-۳
- $1 + \Lambda = {}^{\mu}(T) \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_{\mu} \mathcal{E}_{\mu}}{T \mu} = \frac{1}{2} (T)^{\mu} = \Lambda + \Lambda = \frac{1}{2} (T)^{\mu} =$

إِنَّ نَتَائَجَ عَلَى النظرية:



 $\frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \frac{1}{1} =$ 



- ٦ أوجد:
- 170- <sup>1</sup>(0+w) (m+0) 170 (1)
- ج نه<u>ا (س-٤)° + ۳۲</u>

### الوحدة الثالثة: النهايات والاتصال

### 🕠 الحل

$$0 + + = {}^{4}0 \times \xi = \frac{{}^{4}0 - {}^{4}(0 + w)}{w}$$

$$Y = {}^{m}Y \times \frac{0}{Y} = \frac{{}^{o}Y - {}^{o}W}{{}^{o}Y - {}^{o}W} \xrightarrow{Y \leftarrow W}$$

$$\frac{\circ (Y-) \circ (\xi-m)}{(Y-) \circ (\xi-m)} = \frac{\varphi Y + \circ (\xi-m)}{(Y-) \circ (\xi-m)} = \frac{\varphi Y + \circ (\xi-m)}{(Y-m)} = \frac$$

$$\wedge \cdot = {}^{\xi}(Y-) \circ =$$

$$\frac{\frac{\circ}{1}(17)^{\frac{\circ}{1}}}{\sqrt{1}\sqrt{1}\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{17} - \sqrt{10}}{\sqrt{12}} = \sqrt{17} - \sqrt{10}$$

$$\sqrt{17} = \sqrt{17} - \sqrt{17} = \sqrt{17} - \sqrt{17} = \sqrt{17} + \sqrt{17} = \sqrt$$



### 🚰 حاول أن تحل

## ٥) أوجد:



### تمـــاريــن ۳ – ۲

### أكمل ما يأتي:

$$= \frac{\overline{Y} \overline{W} - \overline{W} \overline{W}}{\overline{Y} - \overline{W}} = \frac{e^{-1} \overline{W}}{\overline{Y} -$$

$$= \frac{\xi - r_{m}}{r - m} \xrightarrow[r \to m]{} \underbrace{\xi}$$

### اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

( ج ۳

ف ليس للدالة نهاية

في ليس للدالة نهاية

ف ليس للدالة نهاية

 $\frac{\pi}{r}$  نہا جاس تساوی  $\frac{\pi}{r}$  نہا ہے اس تساوی ا

أ ا نها مس-۱ س-۱۱ ساوی: س→۱۲ س-۱۲ ب

 $\frac{7}{\pi}$  ?

10 ?

نها <u>سا- ۱۶</u> لها وجود فإن اتساوى: س→۲ س-۲

Y =

10 نہا <sup>٥</sup> تساوی: س<sub>۲</sub> (س-۲) (س-۲) (س

(پ صفر

ف ليس للدالة نهاية

م ع

2 3

أوجد قيمة كل من النهايات الأتية (إن وجدت)

۱۰۲س لین ۱۷۰ اس۳-۳ س

آ) نہا (س<sup>۲</sup> - ۳س + ۲) س <u>- ۳</u>

<u>√ − q</u> <u>√ − 7</u> <u>√ −</u>

 $\frac{17-\sqrt{m}+7m}{m} \xrightarrow{q} \frac{\sqrt{12}}{m} \xrightarrow{q} \frac{\sqrt{12}}{m} \xrightarrow{q} \frac{\sqrt{m}+7m}{m} \xrightarrow{q} \frac{\sqrt{12}}{m} \xrightarrow{$ 

 $\frac{\frac{1}{Y} - \frac{1}{w + Y}}{w} \longrightarrow 0$ 

 $(\frac{V^{2}-W}{V-W}) \longrightarrow (\frac{V^{2}-W}{W-V})$ 

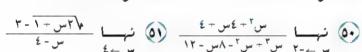
 $\frac{9^{-7}m}{10^{-1}m^{2}-7m} \xrightarrow{W^{2}-7m} \underbrace{\text{ (*)}}_{10^{-1}m^{2}-7m} \xrightarrow{\psi^{2}-7m} \underbrace{\text (*)}_{10^{-1}m^{2}-7m} \xrightarrow{\psi^{2}-7m} \underbrace{\text{ (*)}}_{10^{-1}m^{2}-7m} \xrightarrow{\psi^{2}-7m} \xrightarrow{\psi^{2}-7m} \underbrace{\text{ (*)}}_{10^{-1}m^{2}-7$ 

۳۲-°س (۳)

دار النصر للطباعة (هدلاين)

$$\frac{Y - \overline{V + w} }{w + w} \xrightarrow{W - \overline{A + Y w}} \underbrace{1}_{w \to -W} \underbrace{1}_{w \to -W}$$

$$\frac{1-\Gamma(1-m^{-1})}{m^{-1}} \xrightarrow{\kappa} \stackrel{\text{(in)}}{\longrightarrow} \frac{1-\Gamma(1-m^{-1})}{m^{-1}} \stackrel{\text{(in)}}{\longrightarrow} \frac{1-\Gamma(1-m^{$$



# نشاط 💨

٥٧ البيط بالحجم صنعت علبة مفتوحة من أعلى من ورق مقوى على شكل مربع طول ضلعه ٢٤سم وذلك بقطع مربعات متساوية من أركانها الأربعة. طول ضلع كل منها س سم.

ثانيًا: أثبت أن حجم العلبة يعطى بالعلاقة ع = س (٢٤ ـ ٢ س)٢

أولًا: ارسم شكلًا توضيحيًا للعلبة.

ثالثًا: أوجد حجم العلبة عندما س = ٤ وذلك بدراسة قيم الدالة عندما س ← ٤ مستخدمًا الجدول التالي:

o €,o €,\ → £ ← ٣,٩

رابعًا: استخدم أحد البرامج الرسومية لرسم العلاقة والتحقق من أن القيمة العظمي للحجم توجد عند س = ٤ تفكير إبداعهن

- - الله عند الله عنه ا

ا نہا د(س)

٥٥ البيط بالتحارة: وجدت شركة أنها لو أنفقت س من الجنيهات للدعاية لمنتجها ، فإن ربحها يعطى بالعلاقة د(س) =٢, ٠ س٢ + ٢٠٠ س + ١٥٠. أوجد مقدار ربح الشركة عندما يقترب إنفاقها على الدعاية من ١٠٠ جنيه.

سوف تتعلم

◄ نهاية الدالة عند اللانهاية.

♦ إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية

باستخدام الحن الجبري. ♦ إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية

باستخدام الحن البياني.

المصطلحات الأساسية

Limit of a Function at Infinity

نهاية دالة عند اللانهاية.

# نهاية الدوال المشتملة على اللانهاية

## Limit of the Function involving Infinity

نحتاج في كثير من التطبيقات العملية والحياتية إلى معرفة سلوك الدالة د(س) عندما س → ∞ والنشاط التالي يوضح ذلك.

# نشاط 👫

استخدم أحد برامج الحاسوب في رسم الدالة د حیث: د(س) = ۱۰۰۰ ، س

ماذا تلاحظ من منحنى الشكل إذا ازدادت قيم س الموجبة حتى تقترب من ما لانهاية؟

من الشكل المرسوم نلاحظ أن:

◄ كلما زادت قيم س واقتربت من ما لانهاية اقتربت قيم د(س) من عدد محدد. أكمل الجدول التالي لإيجاد العدد الذي تقترب منه د(س)

00	س →	1	1 * * * *	1 * * *	+++	3+	س
ķ.	سي ←				***	* 2 1	د(س)



نهاية دالة عند اللانهاية

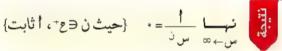
+ = 1 | ig

Limit of a Function at Infinity

من النشاط السابق نجد أنه كلما اقتربت س من ما لانهاية اقتربت قيم د(س) من







### الأبوات المستخدمة

◄ آلة حاسبة علمية

برامج رسومية للحاسوب

### قواعد أساسية:

لاحظ أن: نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند س \_\_\_\_ أ السابق دراستها في الدرس السابق صحيحة عندما نضع س \_\_\_ ∞ بدلًا من س \_\_\_\_أ

# مثال

ا نہا (
$$\frac{1}{w}$$
 -  $\frac{1}{w}$ ) ( $\frac{1}{w}$  -  $\frac{1}{w}$ ) انہا باستخدام أحد البرامج الرسومية.

 $\Rightarrow$  ثم تحقق من ذلك بيانيًّا باستخدام أحد البرامج الرسومية.



$$T = \left(T + \frac{1}{m}\right) \xrightarrow{\infty} ...$$

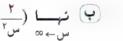
$$\xi = + \times \Psi - \xi = \frac{1}{V_{JM}} = \frac{1$$

### 🚼 حاول أن تحل

### (١) أوجد:

$$(0+\frac{Y}{Y_{out}}) \underset{\infty}{\smile} (1+\frac{\circ}{W}) \underset{\infty}{\smile} (1+\frac{\circ}{W})$$

$$(0 + \frac{Y}{Y_{out}}) \underset{\infty}{\longleftarrow} 0$$



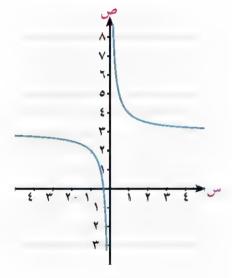
# مثال

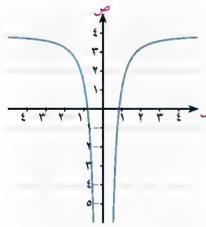
### 🕠 الحل

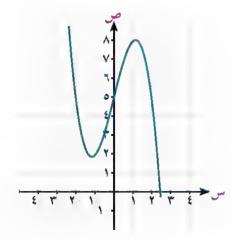
$$(\frac{\circ}{r_{m}} + 1 - \frac{\varepsilon}{r_{m}})^{r_{m}} \xrightarrow{\infty} \cdots$$

$$\left(\frac{\circ}{r_{m}} + 1 - \frac{t}{r_{m}}\right) \underset{\infty_{+}}{\longleftarrow} \times r_{m} \underset{\infty_{+}}{\longleftarrow} =$$

$$\infty - = 1 - \times \infty =$$







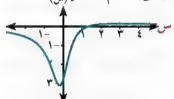
### 🔓 حاول أن تحل

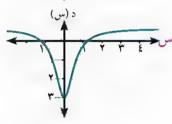
# مثال 🚮

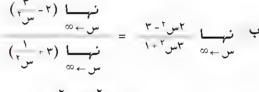
رج نها ۲س<sup>۲-۳</sup> س→∞ ۳س<sup>۲+۲</sup>

🕜 الحل

في كل الحالات يقسم كل من البسط والمقام على س الأعلى قوة للمتغير س في المقام).







$$\frac{(\frac{1}{r_{m}} - m^{2})}{(\frac{1}{r_{m}} + m)} = \frac{m - r_{m}r}{(\frac{1}{r_{m}} + m)} = \frac{m - r_{m}r}{(\frac{1}{r_{m}} + m)} = \frac{m - r_{m}r}{(\frac{1}{r_{m}} + m)} = \infty$$

$$= \frac{n - \infty}{n + m} = \infty$$

نستنتج من هذا المثال أن: عند إيجاد نها  $\frac{c(m)}{m}$  حيث كل من c(m)، c(m)، روال كثيرات الحدود فإن:

- ◄ النهاية تعطى عددًا حقيقيًّا لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.
  - ◄ النهاية تساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط < درجة المقام.
    - ◄ النهاية تعطى ± ∞ إذا كانت درجة البسط > درجة المقام.
- ◄ يستخدم هذا الاستنتاج فقط للتحقق من حلول المسائل باستخدام النظرية والنتيجة ولاتعتبر طريقة حل.

### 🚹 حاول أن تحل

(٣) أوجد:

# مثال

- (٤) أوجد النهايات الآتية:

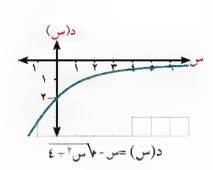
∵ س ---- ∞

🕠 الحل

 $c(m) = \frac{c(m)}{1 - \frac{1}{1 -$ 

 $(\overline{\psi}) \xrightarrow{\psi \to \infty} (\overline{\psi} - \sqrt{\overline{\psi}^{1+\frac{1}{2}}})$ 

- بقسمة كل من البسط و المقام على س البسط و المقام على س  $=\frac{1-1}{1+1} = \frac{1-\frac{1}{r-1}}{1+\frac{1}{r-1}}$



 $\overline{\phantom{a}}$  س >  $\bullet$  أى أن:  $\sqrt{m^7} = |m| = m$  بقسمة كل من البسط والمقام على  $m = \sqrt{m^7}$  ...

$$\hat{r} = \frac{\frac{\xi}{m} - \frac{\xi}{m}}{\left(\frac{\xi}{m} + \sqrt{m} + 1\right)} = \frac{\xi}{m} = \frac{\xi}{m} \cdot \frac{\xi}{m} \cdot$$

### 🚹 حاول أن تحل

- ٤ أوجد النهايات الآتية:



### أكمل ما يأتى:

00 (3)

oo ( a )

oo (3)

∞ (3)

### اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

4 (4)

¥ (7)

¥ 💌

1 2

## الوحدة الثالثة: النهايات والاتصال

$$(\frac{m^{\circ}}{r} - \frac{1}{rm^{\circ}}) \underset{\infty}{\longleftarrow} (\frac{r^{\circ}}{r} + V) \underset{\infty}{\longleftarrow} (\frac{r^$$

$$\frac{-\frac{2}{m}}{r(1-mT)} + \frac{m}{m-1} + \frac{m}{$$

$$(\overline{T+m+r-1}) \xrightarrow{V+} \overline{V+m+r-1} \longrightarrow (\sqrt{sm-r+1}) \xrightarrow{W+} (\sqrt{sm-r+1}) \xrightarrow{W+m+r-1} \cdots \longrightarrow (\sqrt{sm-r+1}) \longrightarrow (\sqrt{sm-r+1}) \xrightarrow{W+m+r-1} \cdots \longrightarrow (\sqrt{sm-r+1}) \longrightarrow (\sqrt{sm-r+1}) \longrightarrow (\sqrt{sm-r+$$

$$\frac{TW^{2}-\xi}{q+1} \longrightarrow \frac{1-w+r}{w} \longrightarrow \frac{1-w+r}{r} \longrightarrow \frac{1-w+r}{r} \longrightarrow \frac{1-w+r}{w} \longrightarrow \frac{1-w+r}{r} \longrightarrow \frac{1-w+r}{w} \longrightarrow \frac{1-w+r}{$$

$$\frac{(w^{+})^{7}(7+w^{+})}{w_{+}}$$
 إذا كان نها  $\frac{1}{\sqrt{1}}$  إذا كان نها  $\frac{1}{\sqrt{1}}$  إذا كان نها  $\frac{1}{\sqrt{1}}$  إذا كان نها  $\frac{1}{\sqrt{1}}$ 

### نفكير ابداعي

تنتج إحدى الشركات بطاقات معايدة بتكلفة ابتدائية قدرها ٥٠٠٠ جنيه وتكلفة الكارت نصف جنيه، فكانت التكلفة الإجمالية جـ = أس + ٥٠٠٠ حيث س عدد البطاقات المنتجة.

تكلفة إنتاج الكارت عند إنتاج:

أوجد تكلفة إنتاج الكارت عندما تنتج الشركة عددًا لا نهائيًا من الكروت.

# نهايات الدوال المثلثية

### Limits of Trigonometric Functions

# نشاط 🚷

سوف تتعلم

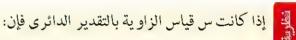
◄ نهايات بعض الدوال المثلثية.

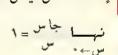
اذا كانت د دالة حيث د(س) =  $\frac{-1}{m}$  والمطلوب دراسة قيم الدالة د عندما س  $\rightarrow$  • حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائري كون جدولًا لدراسة سلوك الدالة د(س) =  $\frac{جاس}{m}$  عندما تقترب س من الصفر مستخدمًا التقدير الدائري

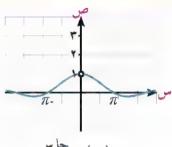
1-	4,1-	٠,٠١-	$\rightarrow$	Ą	<b>←</b>	*3**	* 2 1	+	س
٠,٨٤١٥	٠,٩٩٨٣	,,,,,,,,,,,	$\rightarrow$	rationalent	<b>←</b>	·, 9999A	*,9917	٠,٨٤١٥	<u>جا س</u>

من الجدول السابق استنتج نها جاس









# د(س)= جاس

# د(س) = ظاس د

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الستيني فهل يمكن إيجاد نها جاس

### المصطلحات الأساسية

**Trigonometric Function** 

♦ نهابة دالة مثلثية

Limit of a Irigonometric Function

### الأدوات المستخدمة

◄ برامج رسومية

يوجد لهذه النظرية أكثر من برهان يمكن الاطلاع عليه من

http://math.stackexchange.

com/question/75130

تعبير شفعي

# مثال



- ۳ = <del>سام ا</del> ا
- ج نہا جاہ س جتا ۲ س = نہا جاہ س × نہا جتا ۲ س = ٥ × ١ = ٥ س > ، س

### 🚹 حاول أن تحل

- (١) أوجد:
- <u>π | γ | ω ε ω ω ε ω ω σ ο ω </u>

- 1) نہا ۱-حتاس = صفر س, ،
- آستعن بمدرسك في برهان نتيجة (٢)



 $\frac{r}{V} = \frac{\text{diff}}{\text{m}} = \frac$ 



- ا نہا <u>۱-جتاس</u> ب نہا <u>۱-جتاس</u> سے، ظاس سے، س

### 👣 الحل

- آ نہا ۱-جتاس = نہا ۱-جتاس × سلس خلاس اس مطاس
  - = المرابع الم
    - پ) نہا ۱-جتاس × ۱+ جتاس سے ۱ + جتاس

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}} = \frac{r}{\sqrt{r}} = \frac$$



جااس + جتااس = ١

### 🚹 حاول أن تحل

- ٢) أوجد النهايات الآتية:
- س نہا ہے۔ ا 1) نہا ٦س٢ قتا ٢س ظتا س
   1 س ← ٢

# مثال

## ٣ أوجد النهايات الآتية:

### 🔷 الحل

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{Y} \xrightarrow{q} \frac{1}{W} - \frac{W}{W} - \frac{W}{W} + \frac{1}{W}$$

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{Y} \xrightarrow{q} \frac{1}{W}$$

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{W} \xrightarrow{q} \frac{1}{W}$$

$$Y = \frac{1+1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

### 🚹 حاول أن تحل

### تمـــاريـن ٣ – ٤

### أكمل مايأتي:

$$=\frac{(w-w)}{w} = \frac{(w-w)}{w} =$$

$$= \frac{m^{r_{loc}}}{m^{r_{loc}}} = \frac{m\pi l_{r_{loc}}}{m^{r_{loc}}}$$

### اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

$$\frac{\gamma}{\gamma}$$

$$\frac{Y}{T} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{T} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \frac{\frac{1}{2}}{T} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\pi$$
  $\sim$   $\frac{1}{\pi}$ 

$$\frac{\pi}{\sqrt{\Lambda}}$$

٥ ٢

- ساج سام (۱)
- ہم نہا ظامس سے م
- ۲۵ ن<u>ب جاس (۱ جتاس)</u> س م د م
  - (۲۷ نہا <del>جا اس</del> سے د
  - <u>۲۹ نیا (۱-جتا۲س)</u>
  - س-سجتاس با۳۲ه
- سبة <u>سبة (۱+س۲-)</u>
- ۳۵ نوب (۱-جتاس)× ۲۰۰۰ س
  - ۳۷ نہا جا ٥٣٠٠ جا٥٥٠٠ س
  - س ب ب السلام المسلام المسلام المسلام المسلام المسلم المسل
  - ق نها ظامس+ه جامس س ، ۲ جامس ظاهس
    - <u>سرے د</u> حتا ۲س ۱ سرتا ۲س سرے د
  - <u>ش ۲۰۰۰ ظا۳س++ جا۲۰ س</u>
    - لا نہا جا (جاس) س ←، ه جاس
  - (قتا ٢ س ظتا ٣ س) فتا ٢ س

- ساب با الله
- جتا س ظا س س ← ، س
- <u>جتاس-۱</u> جتاس-۱ جاس
- ا-ظاس س ب جاس-جتاس
- ¥€ نہا س<sup>ا۔۳</sup> جاس
- س کے ظامر ۲۰۰۰ مس س کے س
- ۲۸ نها ( الس<sup>ا</sup> + جا ۳ س ) ع س عد ( ۲ من + ظا ۲ س
  - ع <u>۱ جتاس + جاس</u> س ← ۱ جتاس جاس
    - سظ۲ س ظ۲ س س ب + جا۲۳س
- س → د اعس جتاع س س → د
  - ا جتا ۲ س س ← ، جتا ۲ مس ۱ س
  - س ب جتا (چ-س) س ب جتا (چ-س)

## بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

# 0 - 4

### Existence of Limit of a Function at a Point

# 🗞 فکر و ناقش

### شكل (١)

يمثل منحني الدالة دحيث

$$\Rightarrow$$
 أوجد نها د(س) (النهاية اليمنى)  $\longrightarrow$  س

يمثل الدالة ر حيث

$$(m) = \begin{cases} 7 & \text{ لکل س > } \\ 7 & \text{ لکل س < } \end{cases}$$

◄ أوجد نها ر(س)

$$\nearrow$$
 أوجد نہا ر(س) هل نہا ر(س)= نہا ر(س)  $\longrightarrow$  س $\rightarrow$  .

### سوف تتعلم

◄ النهاية اليمني للدالة عند نقطة.

◄ النهاية اليسرى للدالة عند نقطة.

◄ بحث وجود نهاية للدالة عند

### المصطلحات الأساسية

♦ تهاية يمنى Right Limit

ا نهایة یسری Left Limit

الأدوات المستخدمة

◄ برامج رسومية للحاسوب

◄ آلة حاسبة علمية

# 🛂 تعلم

## نهاية الدالة Limit of a Function

شكا (۱)

شکل (۲)

## النهاية اليمني والنهاية اليسري

يقال إن نهاية الدالة د تساوى ل عندما س تؤول إلى أ إذا وفقط إذا كان نهايتها من اليمين ونهايتها من اليسار عندما س تؤول إلى أ متساويتين وكل منهما تساوى ل حيث ل  $\epsilon$   $\epsilon$ 

وتكتب رمزيًّا:

نها د(س) = ل إذا و فقط إذا كان: د (أ+) = د (أ-) = ل سما

حيث: د (أ+) = نها د (س) « النهاية اليمنى للدالة»  $_{m \to 1^{+}}$ 

د (أ-) = نہا د(س) « النهایة الیسری للدالة»  $_{m\rightarrow +}$ 

### مثال توضحي

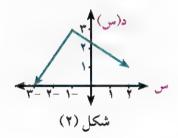
## ل لاحظ في شكل (١) أن:

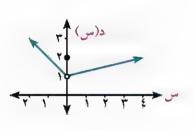
ن. لايوجد نهاية للدالة د عند س
$$\longrightarrow 1.$$
: نها د(س) غير موجودة س $\longrightarrow$ 

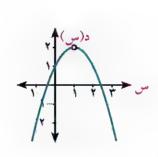
$$\nabla = (^+ \cdot ^-) \cdot \circ = (^- \cdot ^-) \cdot \circ$$

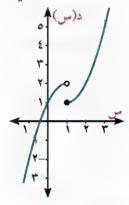
$$\Upsilon = (+ \cdot -) \circ = (- \cdot -) \circ \therefore$$

### ا حاول أن تحل









۱- |س |س | ۱- | س |س | ۱- | ابحث وجود نهایة الدالة د حیث د (س) = 
$$\frac{|m|}{m} - \gamma$$

### بإعادة تعريف الدالة

$$c(m) = \begin{cases} -m - 1 & \text{if } m < 0 \\ -m - 1 & \text{if } m < 0 \end{cases}$$

$$c(m) = \begin{cases} -m - 1 & \text{if } m < 0 \\ -m - 1 & \text{if } m < 0 \end{cases}$$

### 🚼 حاول أن تحل

🔵 الحل

$$c(\cdot^{-}) = \underbrace{\overset{w}{\leftarrow}}_{w \rightarrow \cdot^{-}} \underbrace{\overset{w}{\leftarrow}$$

### 더 حاول أن تحل

$$\pi > \pi$$
 لکل س $\pi > \pi$  لکل س $\pi = \pi$  ابحث وجود نهایة للدالة د عندما س $\pi < \pi$  حیث د(س $\pi < \pi$  لکل س $\pi < \pi$ 



### 🚺 الحل

د. د (۱+) = نہا د (س) .. د (۱+) = نہا 
$$\sqrt{m-1}$$
 = صفر  $m \to 1+$   $m \to 1+$  د (۱-) غیر معرفة لأن الدالة غیر معرفة علی یسار ۱

# ∴ د (س) لیس لها نهایة عندما س → ۱

# 🚰 حاول أن تحل

ابحث وجود نهایة للدالة د عندما س 
$$\rightarrow \pi$$
 حیث د (س) =  $\sqrt[4]{\pi}$ 



## تمارین ۳ – ه



### أكمل ما يأتى:

- من الشكل البياني المقابل:
- أ نها د(س)=..... س →٠٠
- ب نہا د(س) =.....
  - ٧ من الشكل البياني المقابل:
- ل نہا د(س)=..... س→۳-
- ب نہا د(س) =......
  - (٣) من الشكل البياني المقابل:
- ل نہا د(س)=.....
- ب نہا د(س)=...... س ، س ، ج نہا د(س)=.
- ه نها د(س)=... س ← ځ
- ه نہا د(س) =،....
- س→٤ ۲ الدالة د معرفة على ع حيث د(س) = {٢ ٢ س
  - ا نہا د(س)=.....ا
- س → ٠
  الدالة د معرفة على ع حيث د(س) = { ٣ }

  """ -
  - ل نہا د(س) =......ل س ۰۰
  - $\P$  إذا كانت د(س) = { س لكل س $\geqslant \wedge$  > > الجناب الكل س
  - أ نہا د(س) =..... أ



- - لکل س ≥٠ لکل س < ۰
  - ب نہا د(س) =..... لکل س > ٠ لكل س ﴿ ٠
  - (ب) نہا د(س) =...
  - ب نہا د(س) =.....

ابحث وجود نهاية كل من الدوال الآتية:

$$Y > 1$$
 لکل س  $Y = (m)$  حیث د $(m) = \{ T \}$  س  $Y = (m)$  ککل س  $Y = (m)$  لکل س  $Y = (m)$ 

$$1->$$
 لکل س  $+$  ۱ (س) حیث د(س) حیث د(س) =  $1->$  لکل س  $+$  ۱ د(س) حیث د(س)

ال الوجد قیمة م حتی تکون د(س) لها نهایة عندما س 
$$+ 1 - 2$$
 حیث د(س) =  $\frac{\Gamma(1-m)}{|m-1|}$  لکل س  $+ 1 - 2$  میث د(س) =  $\frac{\Gamma(m-1)}{|m-1|}$  لکل س  $+ 1 - 2$  میث د(س) =  $\frac{\Gamma(m-1)}{|m-1|}$ 

$$\pi > m$$
 لکل  $\frac{\gamma}{m-\pi}$  ابحث وجود نهایة للدالة د عندماس  $+ + m$  حیث د(س)  $= m$  لکل س  $+ m$  لکل س  $+ m$  لکل س ککل س  $+ m$ 

 $\pi \longleftarrow$ عندما س

$$\sim > m > \frac{\pi}{r}$$
 لکل  $\sim \frac{\pi}{r}$  درس  $= (m)$  ابحث وجود نهایة للدالة د حیث  $\sim (m)$  ابحث وجود نهایة للدالة د حیث  $\sim (m)$  ابحث وجود نهایة للدالة د حیث  $\sim (m)$ 

$$\pi \leftarrow m$$
 (7)  $\frac{\pi}{m} \leftarrow m$  (9)  $\frac{\pi}{m} \leftarrow m$  (9)  $\frac{\pi}{m} \leftarrow m$ 

$$\checkmark$$
 ابحث وجود نهایة للدالة د (س) =  $\frac{1}{m-Y}$  عندما س

# الاتصال

# 7 - 4

سوف تتعلم

اتصال دالة عند نقطة.

اتصال دالة على فترة،

المصطلحات الأساسية ◄ اتصال دالة عند نقطة

♦ اتصال دالة على فترة

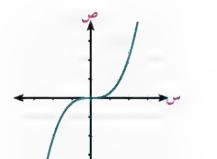
Continuity of a Function at a Point

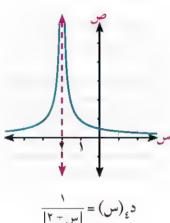
Continuity of a Function on Interval

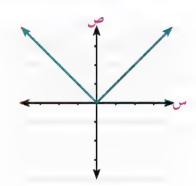
### Continuity

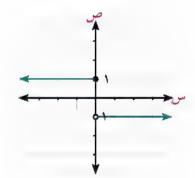
# 🍪 فکر و ناقش

تأمل الأشكال الآتية ثم بين ماذا تلاحظ؟









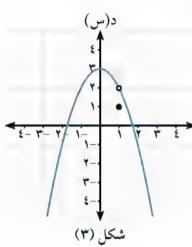
### الأدوات المستخدمة

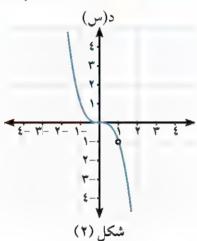
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

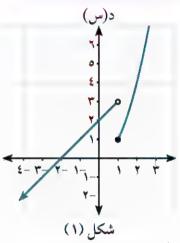
مما سبق نستنتج أن الدالة (د) تكون متصلة عندس = أإذا كان منحنى الدالة لا يعانى انقطاعًا عند هذه النقطة، وتكون الدالة غير متصلة عند س = أإذا انقطع منحناها عند هذه النقطة.

### Continuity of a fanction at a Point

### اتصال دالة عند نقطة







تأمل الأشكال السابقة ثم أوجد نها د(س)، د(١) إن وجدت.

في الشكل (١): نها د(س) ١٠ ، نها د(س) ٣ أي أن نها د(س) غير موجودة بينما د(١) ١٠ ا س١٠٠ س١٠٠ س١٠٠

في الشكل (٢): نها د(س) = ١٠، نها د(س) = ١٠ أي أن نها د(س) = ١٠، د(١) غير معرفة.

في الشكل (٣): نها د(س) = ٢، نها د(س) = ٢ أي أن نها د(س) = ٢ بينما د(١) = ١ س ١٠٠٠

أى أن: نها د(س) ≠د(١)

لذلك تكون الدالة د في كل شكل من الأشكال السابقة غير متصلة عندس = ١



تكون الدالة د متصلة عندما س = أ ؛ إذا تحققت الشروط الآتية معًا:

ک د(أ) معرفة



### بحث اتصال دالة عند نقطة



$$1 \ge 1$$
 ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) =  $\{ w \in \mathbb{N} \}$  لكل س  $\{ w \in \mathbb{N} \}$  لكل س  $\{ w \in \mathbb{N} \}$ 

### 🛖 الحل

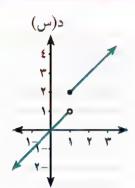
ا بحث الاتصال عند س = ١

د(٠) = ٠، نہا د(س)= نہا س = صفر، س ٠٠ س٠٠

أى أن نها د(س) = د(٠)

لذلك فإن الدالة متصلة عندس = ٠

ب بحث اتصال الدالة عندس = ١



نلاحظ أن قاعدة الدالة يمين النقطة س = ١ تختلف عن قاعدتها يسار تلك النقطة لذلك نبحث وجود نهاية يمني ونهاية يسرى للدالة عند س =١

أى أن: د(۱ + )  $\neq$  (د(۱-) وهذا الشرط يكفى لعدم اتصال الدالة د عند = 1والشكل البياني يوضح عدم اتصال الدالة عند س = ١

### 🚰 حاول أن تحل

$$1 = m = 1$$
 عند س  $= 1$  عند

## التحقق من اتصال دالة عند نقطة

ابحث إتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها:

🛖 الحل

ثانيًا: بحث اتصال الدالة عندس = ٣

$$I = \frac{\lambda - \lambda}{\lambda - \lambda} = \frac{\lambda - \lambda}{\lambda - \lambda} \xrightarrow{\lambda - \lambda} \frac{\lambda - \lambda}{\lambda - \lambda} = \frac{\lambda - \lambda}{\lambda - \lambda} = (\lambda) \circ ...$$

$$T = w$$
 are a compared as  $C(w) = C(w)$  and  $C($ 

$$0 = (\Upsilon + \omega) = (\Upsilon - \omega) =$$

$$(w) = 0$$

$$\lim_{m \to \infty} c(m) = 0$$

$$\lim_{m \to \infty} c(m) = 0$$

$$\lim_{m \to \infty} c(m) = 0$$

لذلك فإن الدالة متصلة عند س = ٣

### 🚰 حاول أن تحل

ابحث اتصال كل من الدوال لآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها:

$$Y = w = 1 -$$

### إعادة تعريف الدالة بحيث تكون متصلة

إذا كانت د(س) غير متصلة عند س = أوكانت نها د(س) لها وجود فأنه يمكن إعادة تعريف الدالة دحتى تصبح متصلة عند س = أ.

# مثال

🔻 أعد تعريف كل من الدوال الآتية إن كان ذلك ممكنًا بحيث تصبح متصلة عند س =١

$$(w) = \begin{cases} w^{7+7}w, & w > 1 \\ 0 & w - 1 \end{cases}$$

$$(m) = \frac{m^2 + 7m - 7}{m - 1}$$

### 🕠 الحل

ا) لكى تكون الدالة د متصلة عند س = ١ فإن نها د (س) = د (١) لكى تكون الدالة د متصلة عند س = ١

$$(Y+w) = \frac{(Y+w)(Y-w)}{Y-w} = \frac{(Y+w)(Y-w)}{Y-w} = \frac{Y+w}{Y+w}$$

ائي أن نہا د(س) = ٤ مندما س 
$$\neq 1$$
 عندما س  $\neq 1$  لذلك يمكن إعادة تعريف د لتصبح متصلة وتكون د(س) =  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z} \}$  عندما س = 1

الكي تكون الدالة متصلة عندس = ١، لابدأن تكون د(١) = نها د(س)

٠٠ د (١٠) ≠ د (١٠) لذلك فإنه لا يوجد نهاية للدالة عندماس ٢٠٠٠

ولا يمكن إعادة تعريف الدالة بحيث تصبح متصلة عند س = ١

### 🚼 حاول أن تحل

 $-\frac{7-800+7}{7-300}$  أعد تعریف الدالة الآتیة حتی تصبح متصلة عند = 7 إذا كان ممكنًا حیث د(س)

\*بین أن د(س) =  $\frac{m^7 + 7m - 00}{m - 7}$  غیر متصلة عند \*



اتصال دالة على فترة continuity of a Function on an Interval

> يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة دحيث د(س) = ٤ - س٢ في الفترة [-٣،٣] ولكي تكون د متصلة على الفترة [-٣،٣] فلابد أن تكون متصلة عند جميع نقاط تلك الفترة.

$$w \to -\pi^ c(w) = c(-\pi)$$
,  $w \to \pi^ c(w) = c(\pi)$ 

### ومما سبق يمكن التوصل إلى التعريف الآتى:



إذا كانت د معرفة على الفترة [أ، ب].

تكون الدالة متصلة على الفترة [أ، ب] إذا كانت:

١- د(س) متصلة على الفترة ]أ، ب[

بالاعتماد على التعريف السابق ونهايات الدول يمكن بيان بعض الدوال المتصلة

ا- الدالة كثيرة الحدود: متصلة على ع أو على مجال تعريفها.

الدالة الكسيية: متصلة على ع عدا مجموعة أصفار المقام.

 $^{\prime\prime}$ - دالة الحبب د(س) = جا (س) وحبب التمام د(س) = حتا س: متصلة على ع

ع- دالة الظلين د(س)= ظاس متصلة على ع - { س: س =  $\frac{\pi}{7}$  + 0.7} ، ن  $\in$  0.7



ابحث اتصال الدالة الآتية على الفترة [ \* ، ص[

$$\pi \geqslant m \geqslant \cdot$$
 کل جاس جتاس لکل  $\pi < m \Rightarrow$  حیث د(س) =  $\pi < m \Rightarrow$  لکل س

🚺 الحل

د(س) معرفة على الفترة [٠، ∞[

لكى نبحث اتصال الدالة، نبحث اتصالها على فترات مجالها الجزئية، وكذلك اتصالها عند النقاط التي يتغير عندها تعريف الدالة وأيضًا من اليمين عند الصفر.

$$\pi : \pi = -\pi$$
 س متصلة على الفترة  $\pi = -\pi$  (۱) د(س) =  $\pi$  س متصلة على الفترة  $\pi = -\pi$  الفترة  $\pi = -\pi$  متصلة على الفترة  $\pi = -\pi$  الفترة  $\pi = -\pi$ 

$$\pi = 1$$
نبحث اتصال الدالة عندما س

$$(\pi) = c(\pi^+)$$
,  $c(\pi^-) = c(\pi^+)$ ,  $c(\pi^-) = c(\pi^-)$ 

$$[0,\infty]$$
متصلة عند س $\pi=0$  من (۱)، (۳)، (۳) الدالة متصلة على  $\pi=0$ .. متصلة عند س

### 🚹 حاول أن تحل

$$\frac{\pi}{Y} > \omega \geqslant \cdot \qquad \qquad \downarrow + 1$$

$$\frac{\pi}{Y} \leqslant \omega \qquad \qquad \uparrow \left(\frac{\pi}{Y} - \omega\right) + Y$$

# مثال

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على مجالها:

$$t = \frac{w^{2} - y}{w} = (w) = \frac{w^{2} - y}{w^{2} + w} = (w) = \frac{w^{2} - y}{w^{2} + w}$$

### 🚺 الحل

$$(-2) = \frac{w^{7-3}}{w+3}$$
 clf  $w$  clf

أى أن الدالة متصلة على ع - { ٤- }

· · · جاس، جتاس متصلة على ع ، دالة المقام (س ٢ - ١) متصلة على ع ، أصفار المقام = {-١ ، ١}

:. الدالة د متصلة على ع - {-١،١}

دالة البسط: ظا س متصلة على ع - {س: س =  $\frac{\pi}{v}$  + ن  $\pi$ ، ن  $\in$  ص-}

دالة المقام:  $m^7 + 1 > 4$  لجميع قيم m فلا توجد أصفار للمقام.

 $\{-\infty\}$  أي أن د متصلة على ع -  $\{-\infty\}$  س:  $\{-\infty\}$  بن  $\{-\infty\}$  ،  $\{-\infty\}$ 

إذا كانت در، در متصلتين على

۱- در ف در متصلة على ع

۲- د, × د ، متصلة على ع

۳- در تکون متصلة على ع

عدا مجموعة أصفار المقام.

#### 🚼 حاول أن تحل

# ٦ ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:

# نشاط 🚷

## ۷) للربط بالكيمياء

إذا كان معدل التفاعل في تجربة كيميائية يعطى بالدالة  $\sim$  حيث  $\sim$  (س) =  $\frac{7.7 \text{ m}}{17+1}$ ، س تركيز المحلول. ابحث في الشبكة الدولية للمعلومات عن تجارب كيميائية يمكن تمثيلها بتلك الدالة ثم:

- أ مثل الدالة بيانيًا بأحد البرامج الرسومية.

# مثال

أو 
$$m^2 + m + 1 = (m + \frac{1}{7})^2 + \frac{\pi}{2}$$
 مجموع مربعین

د. د (س) = (
$$\sqrt{m^{\gamma} + m + 1}$$
) معرفة لجميع قيم  $m \in \mathcal{S}$ 

### 🚰 حاول أن تحل

دار النصر للطباعة (هدلاين)



ادرس اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المعطاة:

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على ع:

$$|T - W| = |W| + |W| |W| +$$

$$=\frac{dl m}{m^{7}-p} = (m) \cdot (m) = \frac{dl m}{m^{7}-p} = (m) \cdot (m) \cdot (m) = \frac{dl m}{m^{7}-p} = (m) \cdot (m) \cdot (m) = \frac{dl m}{m^{7}-p} = (m) \cdot (m) \cdot (m) = \frac{dl m}{m^{7}-p} = (m) \cdot (m) \cdot (m) = \frac{dl m}{m^{7}-p} = (m) \cdot (m) \cdot (m) = \frac{dl m}{m^{7}-p} = (m) \cdot (m) \cdot (m) = \frac{dl m}{m^{7}-p} = (m) \cdot (m) \cdot (m) = \frac{dl m}{m^{7}-p} = (m) \cdot (m) \cdot (m) \cdot (m) = \frac{dl m}{m^{7}-p} = (m) \cdot (m) \cdot (m) \cdot (m) = \frac{dl m}{m^{7}-p} = (m) \cdot (m) \cdot (m) \cdot (m) = \frac{dl m}{m^{7}-p} = (m) \cdot (m) \cdot (m) \cdot (m) \cdot (m) = \frac{dl m}{m^{7}-p} = (m) \cdot (m) \cdot$$

ابحث اتصال كل الدوال الآتية على الفترة المعطاة:

أوجد قيم أفي كل مما يأتي إذا كان:

$$(m) = \begin{cases} \frac{(m+r)^2 - 1}{m} \\ \frac{m}{m} \end{cases}$$
 عندما  $m = r$ 

### أوجد قيمتي الثابتين ب، جفي كل مما يأتي:

$$(m) = \begin{cases} m+1 & 1 < m < 7 \\ m + 1 & 1 < m < 7 \end{cases}$$
 متصلة على ع $(m) = (m)^2 + (m$ 

$$(w) = \begin{cases} w + 7 + v & w < -7 \\ w + v & w < -7 \end{cases}$$
 د  $(w) = \begin{cases} w + 7 + v & w < -7 \\ w + v & w < -7 \end{cases}$  د  $(w) = \begin{cases} w + 7 + v & w < -7 \\ w + v & w < -7 \end{cases}$  د  $(w) = \begin{cases} w + 7 + v & w < -7 \\ w + v & w < -7 \end{cases}$  د  $(w) = \begin{cases} w + 7 + v & w < -7 \\ w + v & w < -7 \end{cases}$ 

أعد تعريف كل من الدوال الآتية حتى تصبح متصلة عند النقط المبيئة إذا كان ممكنًا:

$$c(m) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c(m) = \begin{cases} 1 & \text{otherwise} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c(m) = \begin{cases} 1 & \text{otherwise} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(m) = \begin{cases} -\frac{7mm}{m} & m > 0 \end{cases}$$
 عند  $m = 0$  عند  $m = 0$   $m = 0$ 



لزيد من التهارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

# ملخص الوحدة

مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة 
$$\overline{S}$$
 هي ع  $\bigcup \{-\infty, \infty\}$ 

(۳) إذا كانت قيمة د تقترب من قيمة وحيدة ل، عندما س 
$$\rightarrow$$
 أمن جهة اليمين وجهة اليسار فإن نها د(س) = ل وتقرأ نهاية د(س) عندما تقترب س من أهى ل. ساء

و) إذا كانت د(س) = ق(س) لكل س 
$$\in$$
 ع -  $\{1\}$  وكان نها ق(س) = ل فإن نها د(س) = ل ساد (س) = ل ساد (س) = ل

$$[]$$
 نہا  $(w) = 0.0$  حیث  $(w) = 0.0$  حیث  $(w) = 0.0$   $(w) = 0.0$   $(w) = 0.0$ 

٧) بعض نظريات ونتائج النهايات:

٨) نهاية دالة عند اللانهاية:

$$\{\text{cutiffication}\} \quad \bullet = \frac{1}{\text{obs}} \quad \text{obs} \quad \bullet = \frac{1}{\text{obs}} \quad \text{obs} \quad \bullet = \frac{1}{\text{obs}} \quad \text{obs} \quad \text{ob$$

عند إيجاد نها 
$$\frac{c(m)}{c(m)}$$
 حيث كل من  $c(m)$ ،  $c(m)$  دوال كثيرات الحدود فإن:

- بالنهاية تعطى ± ∞ إذا كانت درجة البسط > درجة المقام.
- ا نہا جاس = جا ا، حیث ا  $\in$  ع ، نہا جتا س = جتا احیث ا  $\in$  ع ، نہا جا س  $\mapsto$  ا
- $\psi$  نہا ظا  $\psi$  عدد حقیقی  $\psi$  اعدد حقیقی  $\psi$  اکل  $\psi$  اکل  $\psi$
- $1 = \frac{d}{d}$  فانت س زاویة مقاسة بالتقدیر الدائری فإن: نہا جاس  $\frac{d}{d} = 1$  نہا  $\frac{d}{d} = 1$ 
  - ا جتاس = ۱ ، نہا ۱ جتاس = ۰ میں سے ۱ میں اس = ۰ میں میں اسے ۱ میں اسے ۱ میں اسے ۱ میں اس
- 11) يقال إن نهاية د(س) عندما س تؤول إلى أتساوى ل إذا وفقط إذا كانت نهايتيها من اليمين ومن اليسار عندما س تؤول إلى أمتساويتين وكل منهما تساوى ل.

وتكتب رمزيًا: نها د(س) = ل إذا وفقط إذا كان: د (أ-) = د (أ-) = ل حيث: سما

- ا د (ا+) = نہا د(س) ، د (ا-) = نہا د(س) س به
- ١١) تكون الدالة د متصلة عندما س = أإذا تحققت الشروط الآتية معًا:
- (أ) عنها د(س) موجودة (أ) الموجودة (أ) الم
  - ١١٣) إذا كانت د (س) معرفة على الفترة [أ، ب]. تكون الدالة د متصلة على الفترة [أ، ب] إذا كانت:
    - ل د(س) متصلة على الفترة ]أ ، ب[
    - ب) نہا د(س) = د(أ) جو نہا د(س) = د(ب) سے ا
      - ١٤) بعض أنماط الدوال المتصلة:
    - ◄ الدالة كثيرة الحدود متصلة على ع أو على مجال تعريفها.
      - ◄ الدالة الكسرية متصلة على ع ماعدا أصفار المقام
        - ◄ دالة الجيب وجيب التمام متصلة على ع

# 🕡 معلومات إثراثية

قم بزيارة المواقع الآتية:











# اختبار تراكمت



## أكمل كلًّا مما يأتى:

$$\dots = \frac{\frac{\pi}{\xi} \stackrel{\text{lin}}{\searrow}}{\frac{\pi}{\xi}} \bigcirc$$

$$\frac{0+m^{\gamma-\gamma}m}{m\rightarrow\infty} = \frac{0+m^{\gamma-\gamma}m}{m\rightarrow\infty} = \frac{1}{m}$$

$$rac{\pi}{ au}>$$
لکل س $rac{\pi}{ au}$ لکل س

$$\frac{\pi}{r} > \text{id} \quad \frac{\pi}{r} > \text{id} \quad \frac{\pi}{r} = \text{id} \quad \text{id} \quad \frac{\pi}{r} = \text{id} \quad \text{id$$

## ايحث اتصال كل من الدوال الآتية:

$$Y \neq 0$$
 لکل س  $\neq Y$   $= (m)$  د (س) =  $Y = (m + 1)$  لکل س  $= Y = (m + 1)$  لکل س  $= Y = (m + 1)$ 

ر آ) عند س = ۲  

$$m^{7-9}$$
 علی ع  
 $m^{7-9}$  علی ع

# رس الها وجود حيث د (س) الها وجود حيث د (س) الها وجود حيث د (س) الما تجعل مرس الما د (س) الما وجود حيث د (س) الما تجعل مرس الما الما تحد الما الما تحد الما الما تحد الما الما تحد الم

أوجد النهايات الأتية:

<u>3m<sup>7</sup>+m</u> m,→∞ 7m<sup>7</sup>-0

<u>7+7m</u> <u>√</u> <u>∀₹</u>

ᡝ ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة:

$$\xi = 0 \qquad \text{with } \psi =$$

فابحث اتصال كل من الدوال الآتية عندس = ٤

👣 أوجد قيم ك التي تجعل الدالة متصلة على ع

💎 أوجد قيمة ك، م التي تجعل الدالة الآتية متصلة على ع

(٣١) ادرس اتصال الدالة د:

$$C(m) = \frac{1}{\sqrt{m-1}}$$
 and  $C(m) = \frac{1}{\sqrt{m-1}}$ 



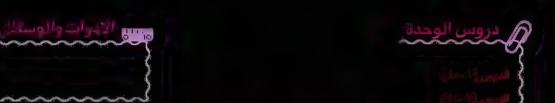
حساب الحثاثات Trigonometry

مقدمة الوحدة

مخرجات تعلم الوحدة









# قانون (قاعدة) الجيب

#### The Sine Rule

لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا المثلث بوجه عام.

سبق أن تعلمت إيجاد طول أحد أضلاع المثلث القائم الزاوية بمعلومية طولي ضلعين

فيه أو طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتيه الحادثين والآن سوف نتعلم طرقًا آخرى

#### سوف تتعلم

◄ قانون (قاعدة) الجيب لأي مثلث.

 استخدام قانون (قاعدة) الجيب في حن المثلث.

◄ نمذجة وحل مشكلات رياضية باستخدام قاعدة الجيب

◄ العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول تصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث وحل مسائل عليها.

#### 🚺 المصطلحات الأساسية

آمر Trigonometry حساب المثلثات

◄ قاعدة الجيب

◄ زاوية حادة Acute Angle

اوية منفرجة Obtuse Angle

١٠ زاوية قائمة Right Angle

حالة مبهمة

The Ambiguous Case

أراد كريم إيجاد المسافة بين الفيوم والإسماعيلية باستخدام البيانات المتوفرة على الخريطة الموضحة في الشكل المقابل. قم بعمل قياس للرسم ثم قس المسافة بين الفيوم والإسماعيلية (المقياس هو ١ سم لكل ٤٣ كم) تأكد من صحة قياساتك بعد دراستك لطرق حل المثلث غير قائم الزاوية ، وإحدى هذه الطرق هو قانون (قاعدة) الجيب.



# تعلم 🚱

◄ آلة حاسبة علمية

الأدوات المستخدمة

#### The Sine Rule

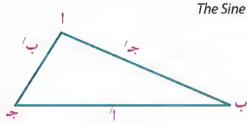
في المثلث أب جاذا استخدمنا الرمل أ للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية أ، والرمزب للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية ب، والرمز ج

قانون (قاعدة) الجيب

للدلالة على طول الضلع المقابل للزاوية ج، فإنه

يمكن استخدام قانون مساحة سطح المثلث لاستنتاج قانون الجيب الذي يبين العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وجيوب الزوايا المقابلة له.

أى أن: ﴿ بَ جِ جِ ا ا = ﴿ أَ جِ جِابِ = ﴿ أَ بِ جِاجِهِ صيغ مساحات المثلث المتساوية





مساحة سطح المثلث = لي حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية بينهما

بضرب كل عبارة في ٢ بقسمة كل عبارة على أب جرَ بالتبسيط

من خواص التناسب

And the second second

أى أن: في أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها وتعرف هذه العلاقة بقاعدة الجيب أي:  $\frac{1}{+1} = \frac{1}{+1} = \frac{1}{+1}$ 

تعلم خاته من هل يمكنك إثبات قانون الجيب بطرق أخرى؟ وضح ذلك

## استخدام قانون (قاعدة ) الجيب في إيجاد طول ضلع في المثلث

مثال مثال

- (١) أوجد طول أكبر ضلع في المثلث أب جالذي فيه ق (١١) = ٣٣ ك ٥٥، ق ( ٧ ب) = ٢٢ ٩٥ ، أ = ١٢٤,٥٥ سم
  - 🚺 الحل

(9)

في أي مثلث يكون الضلع الأكبر طولًا مقابلًا للزواية الأكبر قياسًا. ويكون الضلع الأصغر طولًا مقابلًا للزاوية الأصغر قياسًا. .. أكبر طول ضلع هو جـ كأنه يقابل أكبر زاوية في المثلث وهي زاوية جـ

$$\frac{\dot{\gamma}}{\text{VT ol}} = \frac{17\xi, 0}{\text{O}\xi \text{ FF lp}} . . \qquad \frac{\dot{\gamma}}{\text{pl}} = \frac{1}{1 \text{ lp}} . .$$

$$\text{pul } \xi \Lambda, \xi = \frac{\text{VT ol} + 17\xi, 0}{\text{O}\xi \text{ FF lp}} = \dot{\gamma} . .$$

### 🚹 حاول أن تحل

ر أوجد طول أصغر ضلع في المثلث أب جـ الذي فيه ق ( رأ) = ٤٣ °، ق ( رب) = ٦٥ ° ، جـ = ٤ ٨ سم المثلث أب جـ الذي فيه ق ( رأ) = ٤٣ ° ، ق ( رب) = ١٥٠ و المثلث أب جـ الذي فيه ق ( ربا ) = ٤٣ ° ، ق ( ربا ) = ١٥٠ ° ، جـ الذي فيه ق ( ربا ) = ١٥٠ ° ، جـ الذي فيه ق ( ربا ) = ١٥٠ ° ، ق ( ربال ) = ١٤٠ ° ، ق ( ربا

حل المثلث باستخدام قانون الجيب Solving the triangle using the sine rule

المقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات عناصره المجهولة باستخدام القياسات المعطاة بشرط أن يكون من بينها طول أحد أضلاع المثلث على الأقل.

# أولًا: حل المثلث بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياسي زاويتين:

مثال

#### الوحدة الرابعة: حساب الثلثاث

#### 🐽 الحل

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة، تأكد أولًا من تهيئة الحاسبة لاستخدام التقدير الستيني لقياسات الزوايا ثم اضغط المفاتيح من اليسار إلى اليمين:

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى:

$$|\lambda| \rightarrow (80 \text{ sin } 96) + (80 \text{ sin } 36) =$$

#### 👇 حاول أن تحل

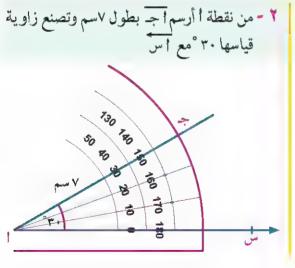
ثانيًا: حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (يوجد حلين لزاوية مجهولة)

#### الحالة المنهمة Ambiguous Case

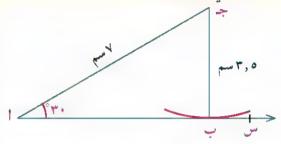
ارسم المثلث أب جـ (إن أمكن ذلك) حسب القياسات الموجودة في الجدول المقابل:

طول بج بالسم	وه ( _ أ )	طول آج بالسم
۳,٥	°#.	٧
٥		
۲		

# ١ - من نقطة أرسم ١ س

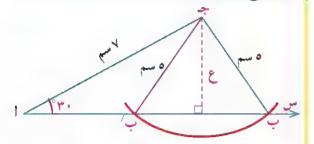


۳ - عندما یکون ب ج = ۰, ۳سم أرکز سن الفرجار عند النقطة ج و بفتحة طولها ۳, ۵ سم ارسم قوسًا یمس أس في نقطة ب.



◄ قس طول جب وقارن طوله مع طول العمود المرسوم من جعلى أس ماذا تلاحظ المرسوم ال

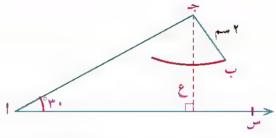
عندما یکون ب جـ = ٥ سم کرر الخطوة (٣)
 واجعل طول فتحة الفرجار ٥سم وارسم قوسًا
 يقطع اس. ماذا تلاحظ؟



◄ قس طول جب ، طول جب ماذا تلاحظ؟

◄ قارن بين طول بج وطول العمود المرسوم
 من نقطة جعلى إس ماذا تلاحظ؟

• - عندما يكون ب ج = ٢سم كرر الخطوة (٣) واجعل طول فتحة الفرجار ٢سم وارسم قوسًا ، هل يقطع هذا القوس اسم ؟

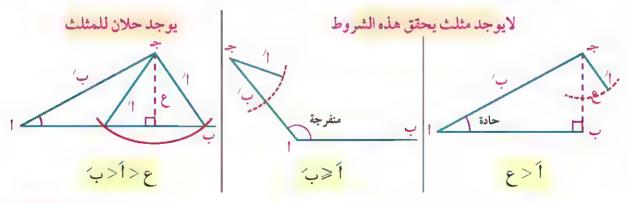


◄ قارن بين طول بج وطول العمود المرسوم من جعلى أس ماذا تلاحظ؟

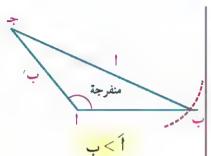
#### تدریب ٔ

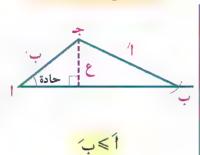
◄ أعد الخطوات السابقة في حالة ما تكون ح. منفرجة وبين الحالات المختلفة لرسم المثلث.

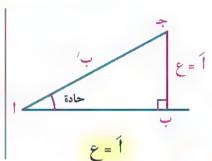
ان ع الخطوات السابقة يمكن استنتاج الحالات المختلفة لحل المثلث أب جـ بمعلومية 1، أ، ب باعتبار أن ع هو أقصر بعد من جـ إلى 1 المنتقلة المختلفة لحل المثلث أب جـ بمعلومية 1 المتنتاج الحالات المختلفة لحل المثلث أب جـ بمعلومية 1 المتنتاج الحالات المختلفة لحل المثلث أب جـ بمعلومية 1 المتنتاج الحالات المختلفة لحل المثلث أب جـ بمعلومية 1 المتنتاج الحالات المختلفة لحل المثلث أب عند من جـ إلى المتنتاج الحالات المختلفة لحل المثلث أب جـ بمعلومية 1 المتنتاج الحالات المختلفة لحل المثلث أب عند من جـ إلى المتنتاج الحالات المختلفة لحل المثلث أب جـ بمعلومية المتنتاج المتنتاج الحالات المختلفة لحل المثلث أب جـ بمعلومية المتنتاج المتناج الحالات المختلفة لحل المثلث أب جـ بمعلومية المتناج المتن



## يوجد حل وحيد للمثلث







# مثال

- 🔻 بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أي مثلث على الأطلاق.
  - مسم، جَ = ٥سم الذي فيه  $0 \cdot ( \angle \psi ) = 11^\circ ، \psi = 11^\circ$
  - (ب) ك ك هـ و الذي فيه قرر كر) = ٦٠° ، ك = ٧سم ، هـ = ٩سم
  - رم ن الذي فيه  $\mathfrak{G}(\underline{\subset} \mathfrak{t}) = 2^\circ$  ،  $\mathfrak{t} = 11$ سم ، م = 10سم  $\mathfrak{T}$

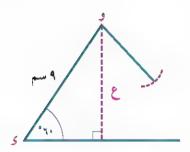
#### 🔵 الحل

- ن. يوجد للمثلث حل وحيد
- ·, 01/4 ~ 11.15×0 = = = 1 .: ومنها قر(∠ج) ≃ ٣٦°
- - 11. b ~ 1 ...

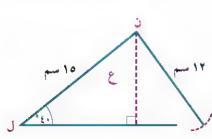
 $= \xi, \Lambda \simeq \frac{\text{°YE} \setminus \Sigma \times \Lambda}{\text{°NL} \setminus \Sigma} \simeq \hat{1} :$ 

·· جاج = ما ١١٠٠ (قاعدة الجيب)

أى أن: قرر \ أ) × ٣٤° ، قرر حب) × ٣٦° ، أ × ٨,٤ سم

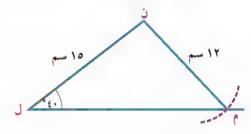


اب ن کو حادة ، ک حد ع=هـ چاک=۹ چا ۲۰ ۲ ۸٫۷سم ·· ى ك > ع (حيث ٧ < ١٠,٧) فلا يوجد حل للمثلث



امج ن کل حادة ، ل حرم (حیث ۱۲ < ۱۵)، ع=١٥ جا ٤٠ ٢ ٩,٦ سم ٠: ع < ل > م (حيث ٢,٩ < ١١ < ١٥) لذلك يوجد للمثلث ل م ن حلان.

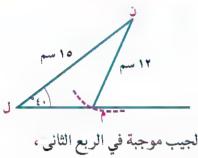
## الحل الأول: ﴿م حادة



$$(° \circ \mathsf{r}, \mathsf{f} \mathsf{7} + ° \mathsf{f} \cdot ) - ° \mathsf{1} \mathsf{A} \cdot \simeq (\mathsf{j} \underline{\searrow}) \diamond \mathsf{f} \cdot .$$

الحل الثاني: 

م منفرجة



ددالة الجيب موجبة في الربع الثانى، جام $\sim 0.00$ , 0.00, 0.0

 $\frac{1r}{\text{°ε. !=}} = \frac{\text{°i}}{\text{°ir, £7 !=}} ...$   $\frac{\text{°ir, £7 !=}}{\text{°ir, £7 !=}} \times \text{ir}$   $\frac{\text{°ir, £7 !=}}{\text{°e. !=}} \simeq \text{°i.}$ 

أى أن: أحد الحلين هو:  $0 \cdot ( \ \ \ ) \simeq 57,70° ، <math>0 \cdot ( \ \ \ \ ) \simeq 57,00° ، <math>0 \cdot ( \ \ \ \ ) \simeq 10,70° ، <math>0 \cdot \simeq 10,70°$  الحل الآخر هو:  $0 \cdot ( \ \ \ \ ) \simeq 177,05° ، <math>0 \cdot \simeq 10,20°$  الحل الآخر هو:  $0 \cdot ( \ \ \ \ \ ) \simeq 177,05° ، <math>0 \cdot \simeq 10,20°$ 

## 🖪 حاول أن تحل

- بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لاتحقق وجود أى مثلث على
   الاطلاق.
  - الذي فيه ق ( مرا على الذي فيه ق ( مرا على الله على الله
  - ب کے وہ و الذي فيه ف√( \( م) = ٣٥ ° ، ه >= ٩ سم ، و >= ٥ سم أو
  - ع من ل الذي فيه ق ( م) = ٥٢° ، م = ٢١ سم ، ن = ٢٦ سم كم من ل الذي فيه

# مثال

- الربط بالجغرافيا: الشكل المجاور يمثل ثلاثة مواقع لمدن مصرية تكون مثلثًا إذا كانت المسافة على الخريطة بين السويس والقاهرة ٨سم وقياس الزاوية عند الفيوم ٤٠° فأوجد لأقرب كيلو متر:
  - ل المسافة بين القاهرة والفيوم.
  - (ب) المسافة بين السويس والفيوم.

علمًا بأن كل اسم على الرسم يمثل ١٦,٧٥ كم

الحل ۱۱۰ = (° ٤٠ + ° ۳۰) - ° ۱۸۰ = (أكر) م ۱۰۰ = با ۱۰۰ = با ۱۰۰ = با ۱۰۰ عنی ۱۱۰ میلات میلات میلات کار در ۱۱۰ میلات کار در ۱۱ میلات کار در ۱۱۰ میلات کار در ۱۱ میلات کار در در ۱۱ میلات کار در ۱۱ میلات کار در د

ن. المسافة بين القاهرة والفيوم 
$$\simeq 7,77 \times 7,77 \simeq 100$$
 كم  $= \frac{100 \times 100^{\circ}}{4.3^{\circ}} \simeq 100 \times 100$  ن. المسافة بين السويس والفيوم  $\simeq 17,00 \times 100$   $\times 100 \times 100$  كم  $\simeq 100 \times 100$ 

#### 🗗 حاول أن تحل

- ٤ في النشاط صفحة (١٥٤):
- أ استخدم الأدوات الهندسية لإيجاد قياسات زوايا المثلث والمسافة بين الفيوم والإسكندرية.
  - ب) أوجد باستخدام قاعدة الجيب المسافة الحقيقية بين:

ثانيًا: الإسماعيلية والإسكندرية.

أولًا: الإسماعيلية والفيوم.

تطبيقات هندسية لقانون الجيب Geometrical Applications on the Sine Rule

حيث من طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أب ج



#### البرهان:

### إذا كانت الدائرة تمر برؤوس مثلث حاد الزوايا

نرسم الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أب جـ الحاد الزوايا ثم نرسم القطر ب س والوتر س آ

فيكون اب=بسجاج

بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن:  $\frac{1}{+1} = ٢$  و ،  $\frac{-1}{+1} = ٢$  و و بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن:  $\frac{1}{+1} = 1$  و و بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن:  $\frac{1}{+1} = 1$  و و بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن:  $\frac{1}{+1} = 1$  و و بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن:  $\frac{1}{+1} = 1$  و و بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن:  $\frac{1}{+1} = 1$  و و بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن:  $\frac{1}{+1} = 1$  و و بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن:  $\frac{1}{+1} = 1$  و و بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن:  $\frac{1}{+1} = 1$  و المريقة مماثلة يمكن إثبات أن:  $\frac{1}{+1} = 1$ 

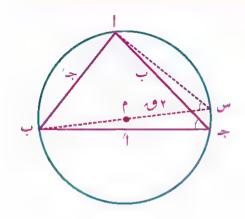
$$Y = \frac{2}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

تعلم ذلتمين أثبت القانون السابق إذا كانت الدائرة تمر برؤوس مثلث منفرج الزاوية.

# مثال 🥏

مثلث ل م ن فیه م = ٤٠٨ سم ، 
$$e_{\lambda}(\underline{\lambda}) = 10^{\circ}$$
 ،  $e_{\lambda}(\underline{\lambda}) = 10^{\circ}$  أوجد:

أ ل  $\lambda$  طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن



# ح مساحة سطح المثلث لم ن

#### 🛖 الحل

° £ \* = (° £ \* + ° \ \* \*) - ° \ \ \* = ( \ \ \ \ ) 

ت = <del>- ا ۱۰ × جا ۲۰ ≃ ۲۰ ۲۵ عسم</del>

٠: جام = ٢٠٠٠ - ٢٠٠٠ - ٢٠٠٠ - ٢٠٠٠

وهو المطلوب (٢)

أى أن من =  $\frac{74,5}{1 - 40.0} \simeq 75,77$  سم 

#### 🚰 حاول أن تحل

( أب ج مثلث فيه أ = ٢٥ سم ، قرر رب = ٢٥ ٦٨° ، قرر حج) = ١٠٣ ٤٢ مارة برؤوسه وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

# مثال 贪

1 أب جد ك شبه منحرف فيه أي // بجد، أي = ٤,٧سم ، ق ( ب) = ٦٢° ، ق ( ك) = ١٠٦°، ص ( اجب) = ١٤°. أوجد أولًا: طول كل من آجي، بج

ثانيًا: مساحة سطح شبه المنحرف أب جـ ٤ لأقرب سنتيمتر مربع.

#### 🔷 الحل

في المثلث أجرى

(بالتبادل) ٠٠ ق ( ح أ ج ) = ق ( ح أ ج ب ) = ١٤°

، و ر ر ا ج ی = ۱۸۰ - (۲۱ ° + ۲۰۱ °) = ۳۳ °

 $^{\circ}$ في المثلث أب ج  $^{\circ}$  در (ب أج) =  $^{\circ}$  ۱۸°  $^{\circ}$  - (۲۲°  $^{\circ}$  + ۲٤°) =  $^{\circ}$ 

۱۳,۰۳ = با ۱۶, ۱۳ = ۱۳,۰۳ = با ۱۶, ۱۳ = ۱۳,۰۳ = با ۱۶ و ۱۳,۰۳ = ۱۶ و ۱۳,۰۳ = ۱۶ و ۱۳,۰۳ = ۱۶ و ۱۳,۰۳ = ۱۶ و ۱۳

مساحة سطح شبه المنحرف أب جد  $= \frac{1}{7}$  أجد  $\times$  ب جد جا ٤١  $+ \frac{1}{7}$  أجد أ ك جا ٤١  $+ \frac{1}{7}$ 

 $^{7}$ سم  $^{9}$   $\simeq$   $^{9}$  ا ا  $^{9}$   $\times$  (۱٤, ٤١ + ۷, •٤) × ۱۳, •٦ ×  $\frac{1}{r}$  =

### 🚹 حاول أن تحل

اب جه که شکل رباعی فیه جه که = \*\*\*سم ، ( ب جه ) = "" ، ( ب که ) = "" ، ( ب که ) = "" ، (ور  $\sqrt{-}$  به حری) = ۸۰° ، ور  $\sqrt{-}$  و أوجد طول كل من  $\sqrt{-}$  ، أج لأقرب سنتيمتر.



# أكمل كل مما يأتي:

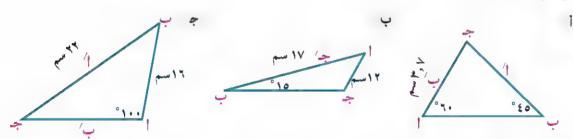
- 🕦 في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع .....
- (٣) أب جـ مثلث متساوى الأضلاع، طول ضلعه ١٠ ٣٠ سم، فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث = ....
  - ع مثلث أب جه فيه ور ( ال ) = ٣٠ ، ور ( جه ) = ٤٠ ، أج = ٤ , ٨سم فإن أ = ..... سم
    - (۵) في المثلث أب جيكون المثلث أب جيكون حاب المثلث أب عبد المثلث أب عبد المثلث أب عبد المثلث المثلث

### اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

- طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أب جه الذى فيه  $0 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  ، أ = ۱۰سم هو:..... أ  $0 \cdot 1 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  مسم المثلث أب جه الذى فيه  $0 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  مسم المثلث أب جه الذى فيه  $0 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  مسم المثلث أب جه الذى فيه  $0 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  مسم المثلث أب جه الذى فيه  $0 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  مسم المثلث أب جه الذى فيه  $0 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  مسم المثلث أب جه الذى فيه  $0 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  مسم المثلث أب جه الذى فيه  $0 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  مسم المثلث أب جه الذى فيه  $0 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  مسم المثلث أب جه الذى فيه  $0 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  مسم المثلث أب جه الذى فيه  $0 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  مسم المثلث أب جه الذى فيه  $0 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  مسم المثلث أب جه الذى فيه  $0 \cdot (\frac{1}{2}) = 0$  من المثلث أب جه الذى فيه أب المثلث أب جه المثلث أب جه المثلث أب جه الذى فيه أب حد الذى في أب حد الذى فيه أب حد الذى فيه أب حد الذى فيه أب حد
- اذا کان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أب جيساوي ٤سم،  $( \underline{ } ) = ^{\circ} ^{\circ}$  فإن أهو:  $( \underline{ } ) = ^{\circ} ^{\circ}$  فإن أهو:  $( \underline{ } ) = ^{\circ} ^{\circ}$  ا ٤سم
  - في المثلث أب جـ يكون المقدار ٢ س جا أ مساويًا:

- إذا كان س طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن عجاص يساوى:
   إن كان س طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن عجاص يساوى:
   إن س م المثلث س ص ع فإن عبد المثلث المثل
- (۱) فی المثلث س ص ع إذا کان ۳ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع فإن س: ص: ع تساوی: ۱ ۲:۳:٤ ب. ۲:۵:۳ ب. ۲:۵:۳ ب. ۲:۵:۳

## ۱۲ حل كل مثلث مما يلى:



- الأطلاق. الأسروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو اكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أي مثلث على الاطلاق.
  - ا ور ( ا ) = ۱۰۰°، أ = ۸سم ، ب = ۵سم ، ب = ۳ سم ب = ۱۰ سم ب = ۱۰ سم ب = ۱۰ سم ب = ۱۰ سم

👀 حل المثلث أب جـ مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة.

(1) 
$$e_{N}(\underline{/}1) = -3^{\circ}$$
,  $e_{N}(\underline{/}1) = -7^{\circ}$ ,  $e_{N}(\underline{/}1) =$ 

10 حل المثلث أب جفي كل مما يأتي:

( ال ق ( ال = ۲۲°، أ = ۱۷سم، ب = ۱۱سم (ق ق ( ح ج ) = ۱۰۳°، ب = ۲۶سم، ج = ۲۱سم ج ور ( ب ) = ۷۰°، ب = ۱۶سم، ج = ۱۶سم

 $1 + \overline{r}$  أب جـ مثلث فيه  $e_{N}(\underline{x}) = -7^{\circ}$  ،  $e_{N}(\underline{x}) = -3^{\circ}$  ، أثبت أن: أ: ب: جَ =  $\sqrt{r}$  :  $7 + \overline{r}$ 

♦ أب جـ ك متوازى أضلاع فيه أب = ١٩,٧٧ سم وقطراه أجـ ، ب ك يصنعان مع ضلعه أب زاويتين مقدارهما الله عنه أب الما يتين مقدارهما الله عنه أب الما يتين أب الله عنه أب الله عنه أب الله عنه الله عنه أب الله عنه أب الله عنه أب الله عنه أب الله عنه عنه الله ع ٣٦٢٢° ، ٥٨ ٤٤٥٨ ، أوجد طولي القطرين.

اب جه مثلث فیه ا ب = ۲۰۵، ۸سم، 0  $( _1 ) = ۲۰ ۲۰ ° ، <math>0$   $( _2 ) = ۷۰ ۲۰ ° ، <math>0$  وجد:

(ب) طول العمود النازل من جه على أب

(۱۹) أب جـ ک شبه منحرف فیه  $\frac{1}{2}/\sqrt{1+1}$ ، أ ک = ۱۰٫۷سم،  $\frac{1}{2}(2)$  = ۱۰۰°،  $\frac{1}{2}(2)$  = ۱۲ ا $\frac{1}{2}$ ص(∠جاء) = ٥٠ ٣٣°، أوجد طول كل من اجر، بج

﴿ أَبِجِوشَكُلُ رَبَاعِي فَيْهُ قِيرُ \ بِجِو)=٥٥°،قر( \ جِوأ)=٥٧°،قر( \ بِجِأ)=٣٦°،ق( \ بِوأ)=٥٥° جه که ۱۰۰۰ متر أو جد طول کل من  $\overline{+ s}$  ،  $\overline{+ F}$  لأقرب متر.

با أب جـ مثلث فيه جا جـ = ٣٥, • ، جـ عند المثلث من الخارج. ومساحة الدائرة المارة برو وس المثلث من الخارج.

(۲۷) أب جـ مثلث فيه أ = ٥٨، 0، 0 ( > + ) = 77° أوجد طول العمود النازل من أعلى أ.

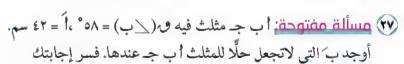
💎 أب جـ مثلث فيه قرر ﴿ أَ) = ٦٠ ، ق ( حب ) = ٤٥ ، فإذا كان أَ + بَ = (١٦٠ + ٢) سم فأوجد كل من أَ، بُ

أ ب ج مثلث مرسوم داخل دائرة طول قطرها ٢٠سم، إذا كان  $( \angle 1 ) = ٤٤° ، <math>( \angle y ) = 84^{\circ}$  ، أوجد أطوال أضلاع المثلث أب ج

طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

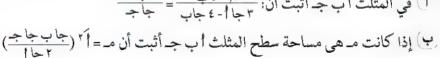
> البيط بالحفرافيا: الشكل المقابل يمثل مواقع ثلاث مدن أ، ب، جـ البيط بالحفرافيا: الشكل المقابل يمثل مواقع ثلاث مدن أ، ب، جـ المدينة أوجد الأقرب كيلو متر:

> > (<sup>ب</sup>) المسافة بين ب ، جـ (أ) المسافة بين أ ، جـ



# 🙀 تفكير الحاعمي:

أب جـ أثبت أن: جام ٤- كب = جاج جاب = جاج جاج جاب = جاج جاج جاج جاج جاب = جاب = جاج جاب = جاب = جاب جاب = ج



# قانون (قاعدة) جيب التمام



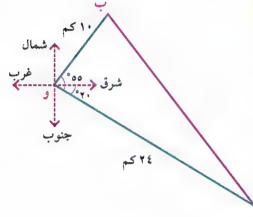
#### The Cosine Rule

#### سوف تتعلم

 ◄ قانون (قاعدة) جيب التيام لأي مثلث.

استخدام قاتون (قاعدة) جيب
 التيام في حن المثلث.

 لمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام قاعدة جيب التيام.



#### المصطلحات الأساسية

الأدوات المستخدمة

Scientific Calculator

◄ آلة حاسة علمة

♦ قاعدة جيب التيام Cosine Rule

◄ زاوية حادة Acute Angle

♦ زاوية منفرجة Obtuse Angle

♦ زاوية قائمة Right Angle

# غكر و ناقش تحركت سفينتان أ، ب في نفس اللحظة من أحد الموانئ، فإذا تحركت أفي اتجاه ٢٠° جنوب

الشرق حيث قطعت مسافة

۲٤ کم وتحرکت ب في اتجاه

٥٥° شمال الشرق حيث قطعت مسافة ١٠ كم في نفس الزمن.

أوجد المسافة بين السفينتين في نهاية هذا الزمن.

استخدم القياسات الهندسية بمقياس رسم مناسب وذلك لإيجاد طول اب

هل يمكنك استخدام قانون الجيب لإيجاد طول أب؟

هل يمكنك استنتاج قانون آخر لإيجاد طول أب بمعلومية طول كل من وأ ، وب وقياس الزاوية المحصورة بينهما؟ فسر إجابتك.



The Cosine Rule

### قانون (قاعدة) جيب التمام

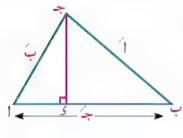
في  $\triangle$  ب z ج القائم الزاوية في <math>z:

(ب ج)  $= ( ج z )^{7} + ( ب z )^{7} ($ **نظرية فيثاغورث**) أي أن:

۲(۱ ج - ب ج ا ۱) + ۲(۱ ج - ب ج ا ۱) + ۲(۱ ج - ب ج ا ۱ ا ج - ب ج ا ۱ ا ج - ۲ ب ج ا ۲ ج ا ۲ ب ج - ج ا ۱ الأقواس)

التج جُرُب ۲ - ۲ ج + (۱۲ تب + ۱۲ اب) ۲ ب = (بالتبسیط) التب ۲ ج ۲ - ۲ ج + ۲ ب =

ومن ذلك يكون:



(بأخذب ممترك)



متطابقة فيثاغورث جا<sup>٢</sup> أ + جتا<sup>٢</sup> أ = ١ تعلم خاتمين أثبت نفس القانون السابق إذا كانت  $_1$  منفرجة في  $_2$  أب جـ تعبير شفهم من اكتب بطريقة مماثلة قيمة كل من ب $_2$  ، جتاب ، جتا جـ تفكير ناقد مل القانون السابق صحيح إذا كان  $_2$  أب جـ قائم الزاوية في أو فسر إجابتك.

ينص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه:

في أي مثلث أب حيكون:

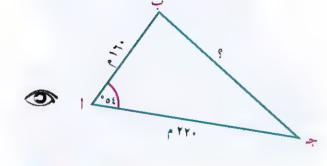
 $\frac{7}{1} = \frac{7}{1 - 7} - 7 - 7 - 7 - 7 = \frac{7}{1 - 7} - \frac{$ 



يفضل عند كتابة القوانين الخاصة بجيب تمام الزاوية أن تؤخذ أضلاع المثلث أن ب ، ح في ترتيب دوري واحد، حتى إذا عرفت إحدى الصور أمكن استناج الصور الأخرى.

# نشاط 🚯

- البيانات التى رصدها المهندس باستخدام جهاز قياسات المسافات.
  - ٢ حدد المطلوب.
- مثل البيانات المطلوبة بمقياس رسم مناسب مستخدمًا الأدوات الهندسية اللازمة..
  - ٤ قس بالسنتيمترات طول بج.
- أوجد الطول الحقيقى للمسافة بين ب، جـ بالكيلو مترات.



- حل يمكنك استخدام قاعدة جيب التمام لإيجاد المسافة بين نقطتي ب ، جـ ؟
   وضح ذلك.
- ✓ قارن بين النتيجة التي حصلت عليها في إيجاد طول بج باستخدام القياسات
   الهندسية وبين استخدامك لقاعدة جيب التمام.

# الاعران (۲)

الطول الحقيقي = الطول في الرسم + مقياس الرسم

## من النشاط السابق نجد أن:

- ١ مقياس الرسم المناسب هو: ١ سم لكل ٢٠ كيلو مترًا
  - ٢ باستخدام القياس: طول بج = ٩ سم في الرسم

ع - قاعدة جيب التمام هي: أ أ = ب ٢ + ح ٢ - ٢ ب ح جتا أ بالتعويض: أ أ = ( ١٦٠ ) 
$$^{7}$$
 +  $^{7}$  +  $^{$ 

٥ - النتائج تكون أدق عندمًا يكون الرسم دقيقًا ولكن يفضل استخدام القوانين لإعطاء نتائج صحيحة تمامًا.

٢ - استخدام الآلة الحاسبة العلمية في إيجاد الناتج:

المرابق المرا

ابدأ

تطبيق على النشاط:أوجد طول الضلع الثالث مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين في على النشاط: في  $\Delta$  أب جدالذي فيه:

إيجاد قياس زاوية في المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال

🔷 الحل

·· أكبر زاوية في القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولًا .: \ أ أكبر زوايا المثلث قياسًا

$$\frac{{}^{r}(\xi,7)-{}^{r}(\Upsilon,A)+{}^{r}(\Psi,\Upsilon)}{\Upsilon,A\times\Psi,\Upsilon\times\Upsilon}=\frac{{}^{r}(\xi,7)-{}^{r}(\Psi,Y)}{2}=\frac{{}^{r}(\xi,7)-$$

باستخدام الآلة الحاسبة

وحیث إن جیب التمام سالب، فالزاویة أ منفرجة .. و ( \ 1) = 8 % ٥٣ % ٩٩°

### 🚹 حاول أن تحل

١٠ أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أب حالذي فيه أ = ١١سم ، ب = ١٠سم ، ح = ٨سم

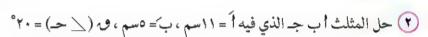
#### استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث:

يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

## أولًا: حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما:

Solving the Triangle Given the Lengths of Two Sides and the Measure of the Angle Included

# مثال 🚮

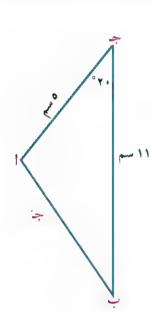


الحل 🔷

يجب إيجاد حـ، ق ( ∠ أ) ، ق ( ∠ ب)

$$\sim 7,079 \simeq -1,079 \simeq -11 \times 0 = -1$$

$$\cdot, \Lambda V - \simeq \frac{{}^{r}(11) - {}^{r}(7, 074) + {}^{r}(0)}{(7, 074)(0)T} = \frac{{}^{r}(1 - {}^{r}) - {}^{r}(1 - {}^{r})}{(1 - {}^{r})^{r}} = 1$$



# لاحظ أن:

فى المثال السابق عند إيجاد قياس زاوية في مثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما يفضل استخدام قانون جيب التمام بدلًا من استخدام قانون الجيب وذلك لأنه:

## ١- في حالة استخدام قانون الجيب:

◄ فإن جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجب.

## ٢- في حالة استخدام قانون جيب التمام فإنه:

- ◄ إذا كانت الزاوية منفرجة يكون جيب تمامها سالبًا.
- ◄ و إذا كانت الزاوية حادة يكون جيب تمامها موجبًا.
- ◄ يسمح أيضًا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة،
   علمًا بأن مجموع طولي أي ضلعين منهما أكبر من طول الضلع الثالث.



#### 🛂 حاول أن تحل

يمكنك استخدام قانون الجيب أيضًا لحساب 0 ( ) ) ، <math>0 ( )

### ثانيًا: حل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة:



T حل المثلث أب حد الذي فيه أ = ٩سم ، ب = ٧سم ، ح = ٥سم.

#### 🚺 الحل

المطلوب هو إيجاد قياسات الزوايا أ، ب، حـ

#### 🚹 حاول أن تحل

يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلًا إلى الحالة المبهمة والتي سبق دراستها في قانون الجيب، ولإيجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام نحصل على معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية) و بحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة والمثال التالي يستخدم هذا المدخل.

# مثال حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس زاوية:

### الحل 🔷

$$\therefore$$
  $\leftarrow = \frac{1}{7} (\lor \checkmark \checkmark \checkmark ) \sqrt{1 + 2} \times 1 \times 1$  (القانون العام لحل المعادلة التربيعية)

كل قيمة موجبة لـ حـ تقابل مثلثًا واحدًا، ولذلك لدينا مثلثان ولإيجاد جتاب فإنه:

عندما ح 
$$= 0.00$$
 عندما ح  $= 0.00$  عندما ح  $= 0.00$   $= 0$ 

تفسين في أحد المثلثين حـ َ = ٩٤ , ١٠ ، ق  $( _{ } ) = ^{ }$  ٣٥٤١ ، ق م  $( _{ } ) = ^{ }$  ١٤٤١ ، وفي المثلث الآخر عليها في المثال رقم (٣) من الدرس الأول (ص٨٥١) الذي يحل المثلث نفسه بمعلومية قانون الجيب.

#### 🚰 حاول أن تحل

تطبيقات هندسية على قانون (قاعدة) جيب التمام Geometric Applications on the Cosine Rule

# مثال

🔘 أب حـ مثلث فيه أ = ٦٣سم ، ب - حـ = ٢٧ سم، ومحيط المثلث يساوي ١٤٠ سم، أوجد كلًّا من ب ، حـ وقياس أصغر زوايا المثلث، ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

### 👣 الحل

من (١) ، (٢) بالجمع ينتج أن:

وبالاحظ أن حد هو أصغر أضلاع المثلث أبح

\*,977\*V79 = 
$$\frac{{}^{r}(r0) - {}^{r}(0r) + {}^{r}(7r)}{0r \times 7r \times r} = \frac{{}^{r} \times - {}^{r} \times + {}^{r}}{\sqrt{1}r} = - \text{lip}$$
...

مساحة المثلث أب ح
$$=\frac{1}{7}$$
 أب جاح  $=\frac{1}{7}$  مساحة المثلث أ $=\frac{1}{7}$  × ۲۲ × ۲۰ × جا ۲۲ ° × ۲۲ سم  $=\frac{1}{7}$ 

#### 🚰 حاول أن تحل

( \ اب حدفيه ب = عسم، أ + ح = ١١سم، أ - ح = ١سم، أثبت أن ق ( \ أ) = ٢ ق ( ر ب)، ثم أوجد محيط المثلث أب حـ ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

# مثال 🚮

وحـ=١٨سم، أوجد: ق ( حـب ي ) ،ق ( حـ ب حـ ي )

#### 🚺 الحل

## نی ∆اب ی

في ∆ و بحد

.: ق ( \ ك ب ح ) ع ٢٤٢٨٩ .:

$$^{+}$$
 , 0 ۱ ٦٧  $\simeq \frac{{}^{7}(77) - {}^{7}(14) + {}^{7}(70)}{14 \times 70 \times 7} = \frac{{}^{7}(5-) - {}^{7}(5-) + {}^{7}(5-)}{(5-)(5-)7} = (5-5-)7$ 

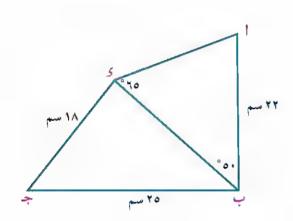
.. ق ( \ ب حدى عد ١٢٨٥ ° ٥٨٥٣ ٢٨ ° ٠

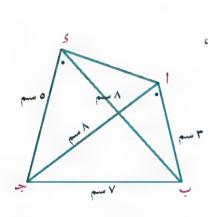
## 🚰 حاول أن تحل

 $\wedge$  اب حدى شكل رباعي فيه  $\wedge$   $\wedge$   $\wedge$  اب حدى شكل رباعي فيه  $\wedge$   $\wedge$   $\wedge$   $\wedge$   $\wedge$   $\wedge$   $\wedge$ ب ك = ١٠سم ، أى = ٨سم ، ق ( \ ك ح ب) = ٣٠ ، أوجد أحد لأقرب سنتيميتر.

# مثال 💮

اب حدى شكل رباعي فيه أب = ٣سم ، أحد = ٨سم ، بحد = ٧سم ، حـ ك = ٥سم ، ب ك = ٨سم ، أثبت أن الشكل أب حـ ك رباعي دائري.





#### 🔷 الحل

## ني ∆اب ح

$$\frac{1}{Y} = \frac{Y(V) - Y(Y) + Y(A)}{Y \times A \times Y} = \frac{Y(V) - Y(Y) + Y(A)}{Y(Y) - Y(Y)} = \frac{1}{Y(Y)} =$$

## في △ ب و حـ

$$\frac{1}{Y} = \frac{Y(Y) - Y(A) + Y(O)}{A \times O \times Y} = \frac{Y(O - O) - Y(O - O) + Y(O - O)}{(O - O) + Y(O - O)} = S$$

$$Y(O - O) = \frac{Y(O - O) - Y(O - O)}{(O - O) - O} = S$$

$$Y(O - O) = \frac{Y(O - O) - Y(O - O)}{(O - O) - O} = S$$

$$Y(O - O) = \frac{Y(O - O) - Y(O) - Y(O)}{(O - O) - O} = S$$

$$Y(O - O) = \frac{Y(O - O) - Y(O) - Y(O)}{(O - O) - O} = S$$

$$Y(O - O) = \frac{Y(O - O) - Y(O) - Y(O)}{(O - O) - O} = S$$

$$Y(O - O) = \frac{Y(O - O) - Y(O) - Y(O)}{(O - O) - O} = S$$

$$Y(O - O) = \frac{Y(O - O) - Y(O) - Y(O)}{(O - O) - O} = S$$

$$Y(O - O) = \frac{Y(O - O) - Y(O) - Y(O)}{(O - O) - O} = S$$

#### 🚹 حاول أن تحل

أب حدى شكل رباعي فيه أب = ٩سم، ب حد= ٥سم، حدى = ٨سم، ك أ=٩سم، أحد= ١١سم. أثبت أن الشكل أب حدى رباعي دائري.

# تمارین ۲ – ۲

# أكمل كلًّا مما يأتي:

- - ٧ يستخدم .....لحل المثلث بمعلومية قياسي زاو يتين وطول ضلع فيه
- 😵 في المثلث أ ب جـ ، أطوال أضلاعه ١٣، ١٧، ١٥ من السنتيمترات فإن قياس أكبر زواياه يساوي ............
  - 🔕 مثلث س ص ع أطوال أضلاعه ٧, ٥سم ، ٤,٧سم، ٣,٤سم فإن قياس أصغر زواياه يساوي ......................
    - - ٧ في ۵ ل ك م يكون ك ٢٠٠٠ ٢٠٠ = .....

## اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

قياس أكبر زاوية في المثلث الذي أطوال أضلاعه ٣، ٥، ٧ هي:

- 👀 في المثلث س ص ع يكون ص ٢٠ + ع ٢٠ س ٢ = ٢ ص ع × .....
  - ل جتا س

- (حج جتا ع
- (ب جاع
- (١) في المثلث أب ج ، أَ: ب : ج َ = ٣: ٢: ٢ فإن جتا أتساوى
- 1/2 \(\frac{1}{\lambda} - \frac{\psi}{\psi}\)

فأثبت أن ق (كب) = ٦٠°

فأثبت أن ق/ ﴿ جِـ) = ١٢٠°

ور ( الم

فأوجد ق ( ح )

فأوجد

فأوجد

<u>۳</u>(ع)

(ب) أ = ١٢ سم، جـ = ٧ سم، ق ( / أ) = ٢٧°

(ف) أ = ١٤ سم، ب = ١٨ سم، ق ( ال) = ٤٠ °

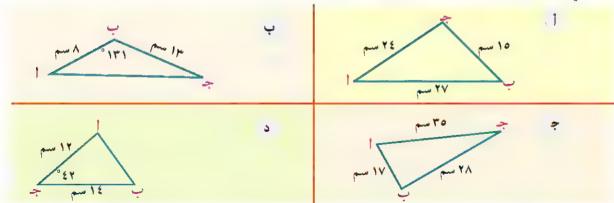
ہ جا س

#### أجب عن الإسئلة الأتيه:

- (١٤) بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لاتحقق وجود أي مثلث على
  - ا) أ= ٤سم، جَ=١٦سم، ق (∠ج) = ١١٥°
    - ج أ = هسم، ج = ١٢سم، قد ( ا ) = ٦٥°
      - (١٣) في المثلث أب ج إذا كان:
      - اً أ= ٥سم ، ب = ٧سم ، ج = ٨سم
      - ب آ= ٣سم ، ب= ٥سم ، جـ ٢ = ٧سم
      - ج. أ=١٣ سم ، ب = ٧سم ، ج = ١٣ سم
        - فَ أَ=١٣ سم ، بَ=١٨ سم ، جـ ٢ = ٧ سم
    - ه ا اسم، ب = ١٧سم، ج = ٢١سم
      - و أ = ٥سم ، ب = ٢سم ، جـ = ٧سم
  - قياس أكبر زاوية في المثلث فأو جد
    - ق أ = ١٧سم ، ب = ١١سم ، ق ( ح ج ) = ٤٢ °
  - فأوجد جر مقربًا لأقرب رقمين عشريين
- ع) ب= ١٦ = جـ ١٦ ع ( ك أ) = ٧٧°

قياس أصغر زاوية في المثلث

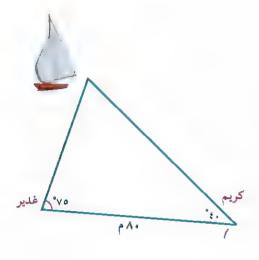
- أ مقربًا لأقرب رقمين عشريين فأوجد
  - التمارين من ( أ إلى ( المثلث أب جـ: ( المثلث أب جـ:



( الله على ١ - ١٦ و ١ سم ، ج = ٤ و ١ سم ، ج = ٤ و ١ سم

ف أ= ١سم، ب=٥سم، جـ = ٤سم

- ( المثلث: عن التمارين من ( الله هـ) هل يمكن تكوين مثلث أب جـ؟ إذا كان ممكنًا حل هذا المثلث:
  - ا ور ( رأ)= ٥٥°، ب = ١٢سم ، ج = ٧سم
  - رج أ=١٢سم، ب=٢١سم، ق ( حج) =90°
    - ه در ( ا)= ۲۶°، أ= ۷سم، ب= ۱۰سم



#### تطبيقات هندسية،

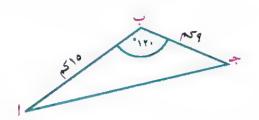
- وقیاس الزاویة بینهما ۳۹°، أوجد طول أصغر قطر له مقربًا لأقرب رقمین عشریین.
- اب جـ ٤ متوازى أضلاع فيه أب = ٩سم ، ب جـ = ١٣سم ، أ جـ = ٢٠ سم، أوجد طول ب ٤
  - (9) أب ج مثلث محيطه ٧٠سم ، أ = ٢٦سم ، ق ( / أ) = ٢٠° ، أوجد مساحة سطحه.
  - الربط بالملاحة البحرية: يقف كريم وغدير على جانبي نهر كم يبعد كريم عن القارب؟
     قرب إجابتك لأقرب متر.
- (٢) الربط بالزراعة: يريد مزارع وضع سياج بقطعة أرض مثلثة الشكل طول ضلعيها ٩٨م، ٦٤م، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٥٣° فما طول هذا السياج؟
  - (۲) الميهنق النظيية: أب جه مثلث فيه ي منتصف بجه، أثبت أن: (أب) ٢ + (أج) ٢ = ٢ (أي) ٢ + ٢ (بي) ٢ ، وإذا كان: أب = ٥سم ، أجه = ٨سم ، ب جه = ١٢ سم أوجد أي.
- البرهنة النظرية (المتفوقين): في المثلث أب جراذا كان: (أ +ب +ج) (أ + ب ج) = ك أب البرهنة النظرية (المتفوقين): ك أب البرهنة النظرية (المتفوقين): ك = 1 عندما ك = ١

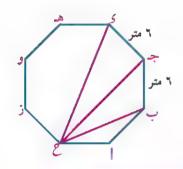
#### تطبيقات حياتية:

 مسلفات: يركب كريم دراجته البخاريه ليقطع المسافة من المدينة أإلى المدينة جمرورًا بالمدينة ببسرعة منتظمة مقدارها ٣٦ كم/س، ثم يعود من المدينة جـ إلى المدينة أ بسرعة منتظمة مقدارها ٤٢ كم/س. أوجد:



- ب الزمن الكلى بالدقيقة للرحلة كلها.
- (٧٥ التصميم المعمارين صمم مهندس معماري مبنى على شكل مثمن منتظم، طول كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار، أوجد أطوال الأقطار عب ، عج ، ع ي .
  - 📆 اكتشف للخطأن أب جـ مثلث فيه أ = ٧سم ،ب ٢٠٠ سم ، جـ ٢ = ٥سم ق ( ال = ١٢,٦٢ ع . أوجد ق ( رب)







 $*,9٤٨\Lambda \simeq \frac{٤١,7٢ + ١*}{V} = باب ::$ 

.: ق ( ر ب)= ۹۰,۷۱،°



 $\frac{\frac{r_{-} - r_{-} + r_{-}}{1r}}{\frac{r_{-} - r_{-}}{1r}} = \frac{r_{-} - r_{-} + r_{-}}{1r}$   $\frac{r_{-} - r_{-} + r_{-}}{1r}}{\frac{r_{-} - r_{-}}{1r}} = \frac{r_{-} - r_{-}}{1r}$   $\frac{r_{-} - r_{-} + r_{-}}{1r}}{\frac{r_{-} - r_{-}}{1r}} = \frac{r_{-} - r_{-}}{1r}$   $\frac{r_{-} - r_{-} + r_{-}}{1r}}{\frac{r_{-} - r_{-}}{1r}} = \frac{r_{-} - r_{-}}{1r}$   $\frac{r_{-} - r_{-} + r_{-}}{1r}}{\frac{r_{-} - r_{-}}{1r}} = \frac{r_{-} - r_{-}}{1r}$   $\frac{r_{-} - r_{-} + r_{-}}{1r}}{\frac{r_{-} - r_{-}}{1r}} = \frac{r_{-} - r_{-}}{1r}$   $\frac{r_{-} - r_{-} + r_{-}}{1r}}{\frac{r_{-} - r_{-}}{1r}} = \frac{r_{-} - r_{-}}{1r}$   $\frac{r_{-} - r_{-} + r_{-}}{1r}}{\frac{r_{-} - r_{-}}{1r}} = \frac{r_{-} - r_{-}}{1r}$   $\frac{r_{-} - r_{-} + r_{-}}{1r}}{\frac{r_{-} - r_{-}}{1r}} = \frac{r_{-} - r_{-}}{1r}$ 



لمزيد من التهارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

#### ملخص الوحدة



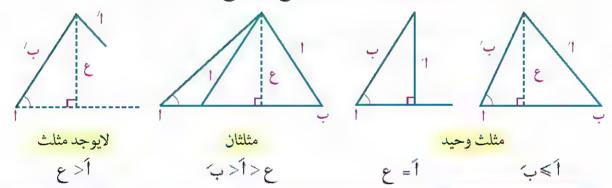
(حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أب جـ)

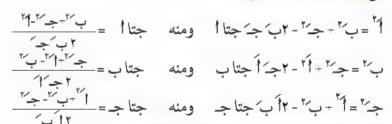
وقد أمكن استخدام هذا القانون (القاعدة) في حل المثلث في الحالات التالية:

- ◄ إذا علم طول أحد أضلاعه وقياسا زاويتين.
- ﴾ إذا علم طولا ضلعين فيه وقياس زاوية ليست محصورة بينهما

### تحديد عدد المثلثات والحالة المبهمة:

الحالة المبهمة: التي يكون معلومًا فيها طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما. وبفرض أن طولا الضلعين هما أن بوالزاوية الحادة أن ارتفاع المثلث ع = ب جا أ فإن:





استخدام قانون جيب التمام في حل المثلثات: يمكن استخدام قاعدة جيب التمام في حل المثلث إذا علم: ➤ طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما. 

➤ أطوال أضلاعه الثلاثة.

> طولا ضلعين وقياس زاوية (حيث يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلاً للحالة المبهمة، والتي سبق دراستها في قانون الجيب، حيث إنه لإيجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام، نحصل على معادلة تربيعية وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الممكنة الناتجة.



#### أسئلة الاختيار من متعدد

	: "\٢.	لآلة الحاسبة تكون قيمة جتا	۱ بدون استخدام ا
<u> </u>	F (*)	<u> </u>	<del>1</del> 1

(۵) من الزوایا الآتیة یکون الجیب والظل لها سالبان؟
(۲۰۰ ° ۲۰ ° ۲۰۰ ° ۲۰

ما قيمة ع في هذا المنحدر؟ مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة:
 ١ , ٥ ب ١ ب ١٩.١

 $\theta$  إذا كان ضلع النهاية لزاوية قياسها  $\theta$  في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة (  $\theta$  في الوضع القياسي فإن ظا  $\theta$  تساوى:

المتطابقة المثلثية التي تربط بين ظاهـ، قاهـ تعطى على الصورة:
 أ قا هـ - ظا هـ = ١ (٣) ظا هـ - قا هـ = ١ (ج. ظا هـ - قا هـ = ١ (٠ + ظاهـ) = قا هـ

نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أب جه، الذي فيه  $\mathfrak{G}(\underline{\hspace{0.2cm}})=7^{\circ}$  ،  $\overline{\hspace{0.2cm}}=7\sqrt{7}$  سم يكون طوله:

1 7mg (\*) pm Thy (\*)

## أسئلة ذات إجابات قصيرة:

أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية فيما يأتى:
 (ع) على الله على ا

أوجد زاوية بقياس موجب ، وأخرى بقياس سالب مشتركتين مع ضلع النهاية مع كل زاوية من الزوايا الآتية:  $\frac{\pi r}{100}$  ه  $\frac{\pi r}{100}$  ه  $\frac{\pi r}{1000}$  ه  $\frac{\pi r}{1000}$ 

حول قیاس الزاویة المکتوبة بالدرجات إلى الرادیان والمکتوبة بالرادیان إلى الدرجات:  $\frac{\pi v}{\epsilon}$  د  $\frac{\pi v}{\epsilon}$  د  $\frac{\pi v}{\epsilon}$  د  $\frac{\pi v}{\epsilon}$  د  $\frac{\pi v}{\epsilon}$ 

(۱۲ أوجد طول القوس المقابل للزاوية ٢١٠ °في دائرة طول نصف قطرها ٦سم. [إرشاد:طول القوس (ل) = هـ كدنق]

ب (جرجتال، جرجال)

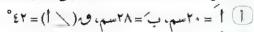
إذا كان جا أ $=\frac{0}{10}$  حيث  $\frac{\pi}{7}$  > أظاب  $=\frac{7}{5}$  حيث  $\pi$  < ب <  $\frac{\pi}{7}$  أوجد قيمة جا أجتا ب + جتا أجا ب.

إرشادات للاختبار: السؤال (١٣) أوجد النسب المثلثية لكل من الزاويتين أ، ب، واضعًا في الاعتبار الربع الذي تقع فيه كل زاوية ثم عوض في المقدار المعطى.

- عشري واحد.
- (0) أب جـ مثلث فيه أ = ٤ سم، ب = ٥ سم ، ج = ٦ سم ، أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث ، ثم أوجد مساحته.

#### أسئلة ذات إجابات طويلة:

- المارة برؤوسه ۱۰سم  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}$ أوجد مساحة المثلث أب جـ.
  - ₩ أب جـ مثلث فيه أ = ١٣سم ، ب = ١٤سم ، ج = ١٥سم ، أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.
    - $\wedge$  حل المثلث ل م ن الذي فيه م $= \vee 1$ سم ،  $\wedge ( \bot ) = 11^\circ \, \%$  ،  $\wedge ( \bot ) = 10^\circ \, \%$ 
      - 19 حدد إذا كان للمثلث أب جـ في كل مما يأتي حل واحد، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد عدد الحلول، مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة ، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



 رئ مستعينًا بالشكل المقابل أثبت أن: 

# (إرشاد: استخدام قانون البعد بين نقطتين لإيجاد (ب جـ) ً هل تحتاج إلى مساعدة إضافية:

١.	٩	۸	٧	٦	٥	٤	٣	۲	١	Contract of the Contract of th
Inc_2	اللوسي	ائدوسی	# * * *	الدرسي	مهارات سابقة	Jac. 2	12000 1 3	مهارات سابقة	مهارات سابقة	4(5)
Y+	19	۱۸	١٧	١٦	10	18	١٣	١٢	11	
الدرمي مهارات سابقة										

# اختبارات عامة

الجبر الاختبار الأول

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

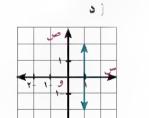
ا إذا كان ٥س = ٢ فإن ٢٥ =

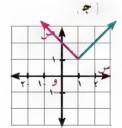
(پ) ۲ 0 ?)

1 . []

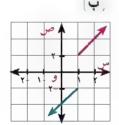
2 5)

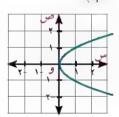
الشكل الذي يمثل دالة في س من بين الأشكال الآتية هو:





(جي ع





(٢ - أس) يمر بالنقطة (١٠ - أ ب فإن أ = عن عندي ص = لو ، (١ - أ س) يمر بالنقطة (١٠ - ١٠ ) فإن أ

A (3)

(پ) ۳

٤ الدالة الأحادية من بين الدوال الآتية هي:

$$\circ = (m) = m + \gamma$$
  $\circ = (m) = m^{\gamma}$   $\circ = (m) = m^{\gamma}$   $\circ = (m) = m^{\gamma}$ 

السؤال الثاني:

عين مجال كل من الدوال الآتية:

 $\frac{1}{1+\frac{1}{m}} + \frac{1-\frac{m}{m}}{1-\frac{r}{m}} = (m)$ 

 $(v) = \{ (w) = (w) = (w) \}$  (v) = (w) = (w) + (w) (v) = (w) + (

## السؤال الثالث:

ا إذا كان د،: ع  $\longrightarrow$  ع حيث د،  $(س) = 7س - 1، در: <math>[-7, 7] \longrightarrow 2$  حيث در (m) = 7 - 7 فارسم الدالة (د, + دم) (س) محددًا مجالها ثم ابحث اطراد الدالة.

💎 أوجد الدالة العكسية للدالة ص = س + ١ ومثلهما في شكل واحد.

## السؤال الرابع:

(١) أوجد في ع مجموعة حل كلِّ من المعادلات الآتية:

استخدم منحنی الدالة د حیث د $(w)=w^{7}$  فی رسم کلّ من:  $oldsymbol{V}$ 

### السؤال الخامس:

(١) أوجد مجموعة حل المتباينة |٣س -٣| ≥٧

ا أوجد مجموعة حل المعادلة: سلًّا - ١٠ سراً + ٩ = صفر

الجبر الاختبار الثانى

### أجب عن الأسئلة الآتية:

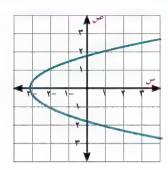
السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

ا إذا كانت ٣س-٢ = ٢س-٢ فإن س =

٧ إذا كانت ص = ١٧ س لكل س ≥. فإن الدالة العكسية لها ص =

$$" = \omega = \frac{1}{2}$$

إذا كانت (د) دائة فردية على [-س، س] فإن د(-س) + د(س) =



المنحني الموضح بالشكل المقابل متماثل حول المستقيم الذي معادلته

## السؤال الثاني:

- نت قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س.  $\frac{1}{(-w)+1} + \frac{1}{(-w)+1}$  له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س.
  - اختصر البسط صورة: لو أ ملو ب م الوجد الم

#### السؤال الثالث:

استخدم منحني الدالة د حيث د(س) = إس التمثيل كل مما يأتي:

ارسم منحنى كلِّ من الدوال الآتية و حدد مداها ثم ابحث اطرادها:

## السؤال الرابع:

ابحث نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

$$\begin{array}{ccc} & & & & & \\ & & & & \\ & \\ & & \\ & & \\ &$$

أوجد مجموعة الحل لكل ممايأتي:

### السؤال الخامس:

- اطرادها.  $\frac{1}{2}$  إذا كان د(س) =  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$  الدالة ثم ابحث اطرادها.
  - بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو ٢٥ +  $\frac{\text{لو } \wedge \times \text{ لو } 17}{\text{ لو } 18}$

#### أجب عن الأسئلة الآتية؛

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

$$=\frac{0+7m}{(7+7m)m}\underbrace{1+7m}_{\infty}\underbrace{1}$$

ب (ب)

$$\frac{1-\frac{V}{m}}{V}$$
 إذا كانت د(س) =  $\left\{\begin{array}{c} \frac{V-V}{m} \\ V \end{array}\right\}$  صفر  $\left\{\begin{array}{c} V \\ V \end{array}\right\}$ 

ن في 
$$\triangle$$
س ص ع المقدار  $\frac{m^{-1} + m^{-1} - 3^{-1}}{1m^{-1} m^{-1}}$  يساوى:

# السؤال الثاني:

## السؤال الثالث:



- ١ من الرسم البياني المقابل أوجد:
- = (۱) عنا د(س) الله عنا د(س

## السؤال الرابع:

- ر اب جـ مثلث فيه  $\hat{l} = 0$  سم،  $\hat{\psi} = V$  سم ،  $\hat{v} \cdot (\underline{t}) = 0$  وجد  $\hat{v} \cdot (\underline{t})$ .
  - ۲ ميث : عبد التي تجعل الدالة د متصلة عند س = ۲ حيث :

$$\begin{cases}
Y \leqslant w & (1-Y)w \\
Y > w & (1-Y)w
\end{cases} = (w)$$

السة ال الخامس:

$$\cdot \leftarrow$$
 ابحث وجود نهایة للدالة د حیث د(س) =  $\left\{ \begin{array}{c} \frac{\text{dil } 7m}{\text{elm}} \\ \text{elm} \\ \frac{7+m}{\pi} \end{array} \right.$  عندما س  $\cdot \cdot$  عندما س  $\cdot \cdot$ 

تفاضل وحساب مثلثات

## الاختبار الرابع

#### أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

$$=\frac{P-m}{q-r}$$

﴿ في △أب جيكون جتا (أ+ب) =

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{$$

1 ?

السؤال الثاني:

السؤال الثانى: 
$$m \neq -7$$
  $m \neq -7$   $m \neq -7$  متصلة عند  $m = -7$  فأوجد قيمة أ.  $m \neq -7$   $m \neq -7$  فأوجد قيمة أ.  $m \neq -7$   $m \neq -7$  فأوجد قيمة أ.

اب جه مثلث فیه  $\frac{1}{4}$  جا  $\frac{1}{2}$  جا ب =  $\frac{1}{6}$  جا ج أوجد  $(\sum + 1)$  و إذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته.

### السؤال الثالث:

# السؤال الرابع:

🕜 أب جدى شكل رباعى فيه أب = ٢٧سم، ب جـ = ١٢سم، جدى = ٨سم، ك أ = ١٢سم، أجـ = ١٨سم. أثبت أن اج ينصف حب أى ثم أوجد مساحة الشكل أب جدى.

### السؤال الخامس:

$$\frac{7}{10} \underbrace{\frac{1}{10}}_{0} \underbrace{\frac$$

شكل خماسي منتظم محيطه ٣٠سم. أوجد مساحة سطحه.

# المواصفات الفنية ،

 $\frac{1}{\lambda}$  (VO × YA) was

٤ لون

٤ لون

٧٠ جم أبيض

۱۸۰ جم کوشیه

۱۸۸ صفحة

بشر

289/10/8/11/5/71

مقاس الكتاب:

طبع المستن ،

طبع الفلاف:

ورق المتن :

ورق الغلاف:

عددالصفحات :

التجليد،

رقم الكتاب

جميع حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم داخل جمهورية مصر العربية



دار النصر للطباعة (هدلاين)